UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΔΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARE.

TOME HUITIÈME. — ANNÉE 1902.

63677
24/2/05

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

(Tous droits réservés.)

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s5journaldemat08liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme;

PAR M. P. DUHEM.

1. Introduction.

Dans un précédent Travail [1], nous avons établi, par une méthode imitée de Lejeune-Dirichlet, un criterium qui assure la stabilité de l'équilibre relatif d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. Toutefois, le criterium que nous avons donné est soumis à une restriction; il suppose que la perturbation apportée au système ne modifie pas le moment par rapport à l'axe de rotation de la quantité

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. VII, 1901, p. 331).

de mouvement de ce système. Cette restriction est évidemment regrettable, car les actions perturbatrices étant, en général, inconnues, il est difficile de savoir si la condition précédente est ou n'est pas vérifiée. Il est donc désirable d'affranchir le criterium précédemment trouvé de cette restriction embarrassante. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le présent écrit.

Au cours de la présente démonstration, comme au cours de la précédente, il est fait usage d'un sens quelque peu particulier des mots : *état voisin d'un état donné*. De là pourraient peut-être naître quelques confusions que nous allons chercher à prévenir.

Prenons un système, dépendant d'un nombre illimité de paramètres, mais défini lorsque l'on connaît, pour chacune des masses élémentaires dm qui le composent, les valeurs d'un certain nombre de variables; soient, par exemple, pour nous rapprocher du problème qui nous occupe, les variables r, z, ψ. Soit e_0 un état du système où, pour la masse dm, ces variables ont des valeurs r_0, z_0, ψ_0; soit e un autre état où, pour la même masse dm, ces variables ont des valeurs r, z, ψ. *Ordinairement*, on dit que l'état e est infiniment voisin de l'état e_0 si, pour toutes les masses dm du système, les quantités

$$r - r_0, \quad z - z_0, \quad \psi - \psi_0$$

sont infiniment petites.

Nous écartant de cet usage, *nous dirons que l'état e est infiniment voisin de l'état e_0 si les quantités*

$$\int |r - r_0| \, dm, \quad \int |z - z_0| \, dm, \quad \int |\psi - \psi_0| \, dm$$

sont infiniment petites.

Il est clair que les secondes conditions sont vérifiées lorsque les premières le sont, en sorte que *parmi les états e, qui sont voisins de l'état e_0 selon notre définition, se trouvent, en particulier, tous ceux qui sont voisins de l'état e_0 selon la définition habituelle.*

Mais la réciproque de cette proposition n'est point exacte; parmi les états e qui, selon notre définition, sont voisins de l'état e_0, il en est qui ne sont pas voisins de cet état e_0 aux termes de la définition habi-

tuelle. Ce sont tous ceux pour lesquels l'une au moins des quantités

$$r - r_0, \quad z - z_0, \quad \psi - \psi_0$$

demeure finie pour certaines masses dm, mais où la somme des masses dm, pour lesquelles il en est ainsi, demeure infiniment petite.

En d'autres termes, selon la définition habituellement reçue, l'état e est infiniment voisin de l'état e_0 si, dans le passage de l'état e_0 à l'état e, chaque masse élémentaire a subi une perturbation infiniment petite; selon la définition que nous acceptons, certaines masses pourront avoir subi une perturbation finie, mais la somme de ces masses devra être infiniment petite.

Ce changement dans le sens des mots : *état voisin d'un état donné*, entraîne forcément un changement dans le sens des mots : *minimum d'une grandeur qui dépend de l'état du système*.

On dit, en effet, qu'une grandeur F qui dépend de l'état du système atteint une valeur minimum F_0 dans l'état e_0 si, en tout état e, *voisin* de l'état e_0, cette grandeur F prend une valeur supérieure à F_0.

Traduisons cette définition en acceptant le sens habituel des mots : *état voisin;* nous arriverons à la proposition suivante :

On peut trouver des quantités positives σ, ζ, χ telles que l'on ait

$$F - F_0 > 0,$$

toutes les fois que l'on a, pour toute masse dm,

$$0 < |r - r_0| < \sigma,$$
$$0 < |z - z_0| < \zeta,$$
$$0 < |\psi - \psi_0| < \chi.$$

Traduisons, au contraire, la même définition en acceptant le sens nouveau du mot : *état voisin;* nous arriverons à la proposition suivante :

On peut trouver des quantités positives σ, ζ, χ telles que l'on ait

$$F - F_0 > 0,$$

toutes les fois que l'on a

$$0 < \int |r - r_0| \, dm < \sigma,$$

$$0 < \int |z - z_0| \, dm < \zeta,$$

$$0 < \int |\psi - \psi_0| \, dm < \chi.$$

Il est clair que, *si la quantité* F *est minimum dans l'état* e_0 *du système selon le nouveau sens des mots :* ÉTAT VOISIN, *elle est également minimum selon l'ancien sens; mais la réciproque de cette proposition peut n'être pas exacte.*

Cette proposition entraîne immédiatement cette autre : Si, par les méthodes habituelles du calcul des variations, on détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit minimum, *au sens ordinaire du mot,* dans un certain état e_0 du système, ces conditions seront encore nécessaires, mais peut-être plus suffisantes, pour que F y soit minimum *au sens nouveau du mot.*

Cette remarque a une certaine importance dans la question qui nous occupe.

Nous avons trouvé, dans notre précédent écrit, qu'une masse animée d'un mouvement uniforme de rotation était assurément en équilibre stable (au moins pour certaines perturbations) dans un état où, sous certaines conditions, une certaine grandeur Φ était minimum *au sens nouveau du mot.*

Si, par les méthodes habituelles du calcul des variations, nous cherchons des conditions suffisantes pour que Φ soit minimum *au sens ancien du mot,* il pourra se faire que les conditions trouvées ne suffisent pas à assurer la stabilité de l'équilibre relatif. Lors donc que, par une telle méthode, nous trouvons des conditions de stabilité dites *suffisantes,* nous ne devrons pas oublier que cette suffisance fait l'objet d'un doute, tant qu'on n'a pas démontré qu'elle entraîne le minimum de Φ *au sens nouveau du mot.*

Mais il est d'autres recherches qui ne donnent pas prise à cette objection.

Ayant démontré qu'un certain minimum de Φ, *entendu au sens nouveau du mot,* suffit à assurer la stabilité de l'équilibre relatif, *nous postulons* (¹) que cette même condition est nécessaire pour cette stabilité. Ce postulat une fois admis, si nous trouvons quelque condition nécessaire pour que Φ soit minimum *au sens ancien du mot,* cette condition sera nécessaire pour que l'équilibre relatif soit stable.

Le lecteur appliquera sans peine ces remarques aux propositions que renferme le § 5 de notre précédent Travail.

On peut maintenant se demander pourquoi nous avons changé le sens commun des mots : *état voisin d'un état donné,* et si le but que nous poursuivons n'aurait pas pu être atteint en conservant à ce mot le sens que l'on a accoutumé de lui attribuer. Il ne nous paraît pas que cela soit possible, et voici pourquoi.

Si l'on adoptait le sens ordinaire des mots : *état voisin d'un état donné,* on pourrait commencer la démonstration donnée en notre précédent Travail exactement de la même manière, sauf à supprimer les signes $\int$ qui figurent dans les inégalités (21) et dans les diverses conditions écrites à la page suivante. *Mais il ne serait plus possible de dire que l'ensemble des valeurs prises par la quantité*

$$\left(\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm\right) \quad (^2)$$

dans les divers états E *admet une limite inférieure* P *nécessairement supérieure à zéro, car il ne serait plus vrai de dire qu'un état* E *ne peut être infiniment voisin de l'état d'équilibre primitif* $(\omega_0, r_0, \psi_0, z_0, \varphi = 0)$.

Un état E, en effet, serait forcément défini par les conditions suivantes :

1° Le moment de la quantité de mouvement a pour valeur M;

(¹) Depuis la rédaction du présent Travail, nous avons reconnu que cette condition n'était pas toujours *nécessaire* pour que l'équilibre du système soit stable.

(²) Aux pages 337 et 338 du précédent Travail, nous avons, par erreur, dit Φ au lieu de $\left(\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm\right)$.

2° Il existe des parties du système où l'une au moins des inégalités

$$-r_0 < \sigma, \qquad |\psi - \psi_0| < \chi, \qquad |z - z_0| < \zeta,$$
$$|\omega - \omega_0| < \varepsilon, \qquad \varrho < f$$

se transforme en égalité. Il est clair que, pour de tels états E, la somme $\left(\Phi + \frac{1}{2}\int \varrho^2\, dm\right)$ n'a d'autre limite inférieure que zéro.

Toute la démonstration tomberait donc si, au sens nouveau des mots: *état voisin d'un état donné,* on essayait de substituer le sens ancien.

Après la perturbation, l'état e_1 du système troublé doit être un *état voisin* de l'état e_0 que le système présentait avant la perturbation. Dans notre précédent Travail, nous avions admis [comme on le voit à l'inspection des conditions (20) de l'écrit auquel nous faisons allusion] que l'état troublé e_1 était voisin de l'état d'équilibre e_0 *au sens ancien du mot.* Il est plus logique, et en même temps plus général, d'admettre que ces deux états sont voisins *au sens nouveau du mot.* C'est ce que nous avons admis dans nos *Recherches sur l'Hydrodynamique* (¹), en traitant de la stabilité de l'équilibre absolu; c'est aussi ce que nous admettons dans ce qui va suivre, comme on le voit à l'inspection des conditions (1) du présent écrit.

2. Stabilité de l'équilibre relatif pour des perturbations qui altèrent le moment de la quantité de mouvement.

Soit M_0 *une valeur du moment de la quantité de mouvement. Supposons que, pour toute valeur* M, *suffisamment voisine de* M_0, *de la même quantité, on puisse énoncer les propositions suivantes :*

1° *A chaque valeur de* M *correspond un état d'équilibre* $\mathcal{E}$ *dans lequel la somme* $\Phi = \mathcal{F} + \Omega + W$ *prend une valeur minimum parmi celles qu'elle peut prendre sans changement dans la valeur de* M.

2° *L'état* $\mathcal{E}$ *varie d'une manière continue lorsque la valeur de* M *varie d'une manière continue.*

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique,* première Partie, Chap. II, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III; 1901).

Dans ces conditions, l'état $\mathcal{E}_0$ *qui correspond à la valeur* M_0 *de* M *est stable même pour les perturbations qui altèrent le moment de la quantité de mouvement du système.*

Conservons aux quantités r, z, ψ, ω, φ le sens qu'elles ont dans notre précédent Travail. Soient r_0, z_0, ψ_0, ω_0, $\varphi_0 = 0$ les valeurs qu'elles prennent dans l'état $\mathcal{E}_0$.

Nous donnons au système une perturbation à la suite de laquelle ces quantités prennent les valeurs nouvelles r'_1, z'_1, ψ'_1, ω'_1, φ'_1; le moment de la quantité de mouvement a alors une valeur M_1; le système se trouve dans un état e'_1, qui n'est pas, en général, l'état d'équilibre $\mathcal{E}_1$ relatif à la valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement; en cet état d'équilibre $\mathcal{E}_1$, les variables r, z, ψ, ω, φ prennent des valeurs r_1, z_1, ψ_1, ω_1, $\varphi_1 = 0$.

Après la perturbation, le système prend un certain mouvement; et comme les forces extérieures ont un moment nul par rapport à l'axe de rotation, le moment de la quantité de mouvement garde la valeur M_1. Au temps t après la perturbation, le système est, dans un état e, caractérisé par des valeurs r, z, ψ, ω, φ des variables.

La proposition que nous voulons démontrer peut, d'une manière précise, s'énoncer ainsi :

Quelque petites que soient les quantités positives

$$\varepsilon, \quad \sigma, \quad \chi, \quad \zeta, \quad f,$$

on peut choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 des valeurs positives si petites que les inégalités

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int |\omega'_1 - \omega_0|\, dm < \varepsilon_1, \\ &\int |r'_1 - r_0|\, dm < \sigma_1, \\ &\int |\psi'_1 - \psi_0|\, dm < \chi_1, \\ &\int |z'_1 - z_0|\, dm < \zeta_1, \\ &\int |\varphi'_1|\, dm < f_1 \end{aligned} \right.$$

entraînent, quel que soit t, les inégalités

$$(2)\quad \begin{cases} \int |\omega - \omega_0|\, dm < \varepsilon, \\ \int |r - r_0|\, dm < \sigma, \\ \int |\psi - \psi_0|\, dm < \chi, \\ \int |z - z_0|\, dm < \zeta, \\ \int |\varphi|\, dm < f. \end{cases}$$

Nous remarquerons, en premier lieu, que l'on peut toujours, pour démontrer le théorème indiqué, remplacer les quantités ε, σ, χ, ζ, f par des quantités plus petites; le théorème, démontré avec ces nouvelles valeurs, sera vrai *a fortiori* avec les anciennes.

A chaque valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement correspond un état d'équilibre $\mathcal{E}_1$ et, à cet état $\mathcal{E}_1$, une valeur Φ_1 qui est un minimum parmi celles que Φ peut prendre sans changement dans la valeur du moment M_1. Dès lors, pourvu que $|M_1 - M_0|$ n'excède pas une certaine limite, il est clair que l'on peut toujours choisir pour ε, σ, χ et ζ des valeurs indépendantes de M_1 et assez petites pour que l'on ait assurément

$$(3)\qquad \Phi'_1 - \Phi_1 > 0$$

toutes les fois que l'on a

$$(4)\quad \begin{cases} \int |\omega'_1 - \omega_1|\, dm \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \int |r'_1 - r_1|\, dm \leqq \frac{\sigma}{2}, \\ \int |\psi'_1 - \psi_1|\, dm \leqq \frac{\chi}{2}, \\ \int |z'_1 - z_1|\, dm \leqq \frac{\zeta}{2}, \end{cases}$$

l'état e''_1 que définissent les valeurs ω''_1, r''_1, ψ''_1, z''_1 des variables correspondant à la même valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement que les états $\mathcal{E}_1$ et e'_1.

Dans cet énoncé, on sous-entend, cela va sans dire, que l'on n'a pas en tout point

$$\omega''_1 = \omega_1, \qquad r''_1 = r_1, \qquad \psi''_1 = \psi_1, \qquad z''_1 = z_1,$$

cas auquel l'état e''_1 serait identique à l'état $\mathcal{E}_1$ et le premier membre de l'inégalité (3) serait égal à 0.

Dans ces conditions, nous voyons que nous aurons à coup sûr, pour toutes les valeurs de M_1 comprises dans les limites données.

$$(5) \qquad \Phi''_1 + \frac{1}{2}\int \varphi''_1\, dm - \Phi_1 > 0$$

toutes les fois que nous aurons

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int |\omega''_1 - \omega_1|\, dm \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \\ &\int |r''_1 - r_1|\, dm \leqq \frac{\sigma}{2}, \\ &\int |\psi''_1 - \psi_1|\, dm \leqq \frac{\chi}{2}, \\ &\int |z''_1 - z_1|\, dm \leqq \frac{\zeta}{2}, \\ &\int \varphi''_1\, dm \leqq f, \end{aligned}\right.$$

sauf dans le cas où nous aurions

$$(7) \qquad \omega''_1 = \omega_1, \qquad r''_1 = r_1, \qquad \psi''_1 = \psi_1, \qquad z''_1 = z_1, \qquad \varphi''_1 = 0,$$

cas auquel l'inégalité (5) se changerait en égalité.

Nous pourrons toujours supposer, et nous supposerons désormais, que l'on ait pris pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 des valeurs assez petites pour que $|M_1 - M_0|$ reste compris dans les limites où la proposition précédente est exacte.

Nous dirons qu'un état du système est un état E_t lorsqu'il satisfera aux conditions suivantes :

1° Le moment de la quantité de mouvement est M_t ;

2° L'une au moins des conditions (6) a pris la forme d'une égalité ;

3° Toutes les conditions (6) sont vérifiées.

En un état E_t, les égalités (7) ne sont ni vérifiées, ni infiniment près d'être vérifiées ; donc, en un tel état, le premier membre de l'inégalité (5) n'est ni égal à 0, ni infiniment près d'être égal à 0.

Considérons donc toutes les valeurs de M_t comprises dans les limites où cette quantité peut varier, puis tous les états E_t qui correspondent à chacune de ces valeurs de M_t. Pour chacun de ces états E_t, formons la somme

$$\Phi'_t + \frac{1}{2}\int \tau'_t\, dm - \Phi_t.$$

L'ensemble de ces quantités sera limité inférieurement par une certaine valeur positive P, indépendante de M_t ; en sorte que, quelle que soit la valeur M_t du moment de la quantité de mouvement, et quel que soit l'état E_t qu'on lui fasse correspondre, on aura

$$\Phi'_t + \frac{1}{2}\int \tau'_t\, dm - \Phi_t \geqq P. \tag{8}$$

Cela posé, considérons les inégalités (2) ; elles seront sûrement vérifiées si l'on a en l'état e, quel que soit t,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int |\omega - \omega_t|\, dm + \int |\omega_t - \omega_0|\, dm < \varepsilon, \\ &\int |r - r_t|\, dm + \int |r_t - r_0|\, dm < \sigma, \\ &\int |\psi - \psi_t|\, dm + \int |\psi_t - \psi_0|\, dm < \chi, \\ &\int |z - z_t|\, dm + \int |z_t - z_0|\, dm < \zeta, \\ &\qquad\qquad \int |\tau|\, dm < f. \end{aligned}\right.$$

Mais on peut évidemment choisir pour ε_t, σ_t, χ_t, ζ_t des valeurs si

petites que M_1 diffère de M_0 aussi peu que l'on veut; et comme l'état d'équilibre $\mathcal{E}_1$ varie d'une manière continue avec M_1, on peut évidemment choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1 des valeurs si petites que l'état $\mathcal{E}_1$ diffère aussi peu que l'on veut de l'état $\mathcal{E}_0$ et que l'on ait

$$(10)\qquad \begin{cases} \int |\omega_1 - \omega_0|\, dm < \frac{\varepsilon}{4}, \\ \int |r_1 - r_0|\, dm < \frac{\sigma}{4}, \\ \int |\psi_1 - \psi_0|\, dm < \frac{\chi}{4}, \\ \int |z_1 - z_0|\, dm < \frac{\zeta}{4}. \end{cases}$$

Alors, pour que les inégalités (9) soient vérifiées quel que soit t, il suffira que les inégalités

$$(11)\qquad \begin{cases} \int |\omega - \omega_1|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \int |r - r_1|\, dm < \frac{\sigma}{2}, \\ \int |\psi - \psi_1|\, dm < \frac{\chi}{2}, \\ \int |z - z_1|\, dm < \frac{\zeta}{2}, \\ \int |\varphi|\, dm < f \end{cases}$$

soient vérifiées, quel que soit t.

Or, en premier lieu, on peut prendre ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 assez petits pour qu'elles soient sûrement vérifiées à l'instant $t = 0$, où l'on a

$$\omega = \omega'_1, \qquad r = r'_1, \qquad \psi = \psi'_1, \qquad z = z'_1, \qquad \varphi = \varphi'_1.$$

En effet, pour qu'elles se trouvent vérifiées à cet instant, il suffit

évidemment que l'on ait

$$(12)\quad \begin{cases} \int |\omega'_1 - \omega_0|\, dm + \int |\omega_0 - \omega_1|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \int |r'_1 - r_0|\, dm + \int |r_0 - r_1|\, dm < \frac{\sigma}{2}, \\ \int |\psi'_1 - \psi_0|\, dm + \int |\psi_0 - \psi_1|\, dm < \frac{\chi}{2}, \\ \int |z'_1 - z_0|\, dm + \int |z_0 - z_1|\, dm < \frac{\zeta}{2}, \\ \int |\varphi'_1|\, dm < f \end{cases}$$

ou bien, en vertu des inégalités (10), que l'on suppose déjà vérifiées, il suffit que l'on ait

$$(13)\quad \begin{cases} \int |\omega'_1 - \omega_0|\, dm < \frac{\varepsilon}{4}, \\ \int |r'_1 - r_0|\, dm < \frac{\sigma}{4}, \\ \int |\psi'_1 - \psi_0|\, dm < \frac{\chi}{4}, \\ \int |z'_1 - z_0|\, dm < \frac{\zeta}{4}, \\ \int |\varphi'_1|\, dm < f. \end{cases}$$

Il est évident que l'on peut prendre ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 assez petits pour que ces inégalités soient vérifiées.

Les inégalités (11) sont donc vérifiées à l'instant $t = 0$; dès lors, pour qu'elles cessassent d'être vérifiées à partir d'un certain instant t, il faudrait qu'à cet instant t l'état e du système fût un état E_1; nous prouverons donc que les inégalités (11) demeurent vraies quel que soit t, si nous prouvons que l'on peut choisir ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 si petits que l'état e ne puisse jamais devenir un état E_1; pour cela, il suffit, en vertu de l'inégalité (8), de prouver que l'on peut choisir ε_1, σ_1, χ_1,

ζ_1, f_1 assez petits pour que l'on ait, quel que soit t,

$$(14) \qquad \Phi + \frac{1}{2}\int \varrho^2\,dm - \Phi_1 < \mathrm{P}.$$

Le premier membre de l'égalité (14) peut s'écrire

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varrho^2\,dm - \Phi'_1 + (\Phi'_1 - \Phi_0) + (\Phi_0 - \Phi_1).$$

Il est clair, tout d'abord, que l'on peut choisir ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1 assez petits pour que l'on ait

$$(15) \qquad \begin{cases} \Phi'_1 - \Phi_0 < \dfrac{\mathrm{P}}{3}, \\ \Phi_0 - \Phi_1 < \dfrac{\mathrm{P}}{3}. \end{cases}$$

D'autre part, le principe des forces vives nous donne la condition

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varrho^2\,dm \leqq \Phi'_1 + \frac{1}{2}\int \varrho'^2_1\,dm,$$

le signe $<$ convenant au cas où il y a eu travail des actions de viscosité et de frottement dans le passage de l'état e'_1 à l'état e, et le signe $=$ convenant au cas où ces actions n'ont effectué aucun travail. Nous avons donc

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varrho^2\,dm - \Phi'_1 \leqq \frac{1}{2}\int \varrho'^2_1\,dm.$$

Si nous prenons f_1 assez petit pour que nous ayons

$$\frac{1}{2}\int \varrho'^2_1\,dm < \frac{\mathrm{P}}{3},$$

nous aurons aussi, quel que soit t,

$$(16) \qquad \Phi + \frac{1}{2}\int \varrho^2\,dm - \Phi'_1 < \frac{\mathrm{P}}{3}.$$

Les inégalités (15) et (16) ayant lieu quel que soit t, il en sera de même de l'inégalité (14) et le théorème sera démontré.

Une dernière remarque est nécessaire.

Le potentiel interne $\bar{\pi}$ ne varie pas lorsqu'on donne au système un déplacement d'ensemble dans l'espace; la quantité W ne varie pas lorsqu'on lui donne une translation quelconque parallèle à l'axe Oz de rotation, et il en est de même de la somme $(\bar{\pi} + W)$. Il peut arriver que la quantité Ω demeure, elle aussi, invariable lorsque le système se meut parallèlement à Oz: c'est ce qui aura lieu, en particulier, si les actions extérieures sont nulles, comme il arrive dans plusieurs problèmes de grande importance.

Dans ce cas, nous déterminerons chaque point par sa distance z à un plan mené perpendiculairement à l'axe de rotation et non pas fixe dans l'espace, mais passant toujours par un même point matériel choisi une fois pour toutes; de la sorte, deux états qui se déduiront l'un de l'autre par une simple translation parallèle à l'axe de rotation ne seront pas considérés comme distincts. De même, au lieu de considérer la vitesse que nous nommons φ, il faudra considérer la vitesse analogue en supposant le mouvement de chaque point rapporté non à un plan fixe normal à l'axe de rotation, mais au plan variable que nous venons de définir. Enfin, dans la définition de la stabilité, on devra regarder un système comme immobile lorsqu'il est simplement animé d'un mouvement de translation uniforme parallèle à l'axe de rotation.

Il suffit d'indiquer cette remarque, qui a son analogue dans l'étude de la stabilité d'un système défini par un nombre limité de paramètres variables [1].

---

[1] P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 353.

Sur une catégorie de fonctions transcendantes [1] *et les équations différentielles rationnelles;*

PAR M. EDMOND MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

I.

Nous nous proposons ici de chercher si les séries ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable x, et dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance, peuvent être solutions des équations différentielles rationnelles en y et ses dérivées et dont les coefficients sont soit des polynomes entiers en x, soit des séries en $\frac{1}{x}$ ou x dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance.

Nous obtiendrons en particulier le théorème général suivant :

La fonction

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est quelconque et ψ_n une fonction croissante de n telle que

$$\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$$

(λ fini et $\neq 0$, μ_n croissant indéfiniment avec n), ne peut satisfaire

[1] Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Paris, 25 février, 11 mars, 11 novembre 1901.

à une équation différentielle rationnelle en x, y et ses dérivées, d'ordre quelconque.

Nous indiquerons des extensions de ces résultats aux séries de fractions rationnelles et aux fractions continues. Il en résultera en particulier cette propriété remarquable : il existe une infinité de fonctions parmi lesquelles au moins les fonctions algébriques et celles définies par les équations différentielles rationnelles qui, développées en séries de fractions rationnelles de la forme

$$\varphi = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots$$

aux environs d'un point ordinaire x_0 (la base $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ étant formée de polynomes entiers en x arbitrairement choisis dont les racines ont leurs modules limités, R_n étant de degré > 0 et $<$ celui de Q_n, et P_0 un polynome) ne peuvent être telles que le terme de rang $n+1$ soit, par rapport au terme précédent, d'un ordre de petitesse supérieur à une certaine limite fonction des degrés des polynomes de base, quelle que soit la base choisie.

Nous signalerons l'analogie de ces résultats avec ceux obtenus par Liouville et par nous en ce qui concerne les nombres algébriques et les racines des équations transcendantes [1].

II.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \sum A y^{\alpha_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{\alpha_k},$$

F étant une fonction rationnelle de x, de y et de ses dérivées successives en x jusqu'à l'ordre $k \geq 0$; on pourra toujours prendre pour les coefficients A des polynomes entiers en x.

[1] Voir notre Note du *Journal de Mathématiques*, 1901, p. 419.

Soit la fonction

$$(2)\qquad \varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est une quantité quelconque et ψ_n une fonction croissante de n, qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, mais qui est telle que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n : supposons que φ satisfasse à (1); on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \sum \frac{-\theta_n \psi_n}{x^{1+\psi_n}}, \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \sum \frac{\theta_n \psi_n (1+\psi_n)}{x^{2+\psi_n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^k\varphi}{dx^k} &= \sum (-1)^k \frac{\theta_n \psi_n (1+\psi_n)\ldots(k-1+\psi_n)}{x^{k+\psi_n}}, \end{aligned}\right.$$

et, identiquement,

$$(4)\qquad 0 = \sum A \left(\sum \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}\right)^{i_0} \cdots \left[\sum (-1)^k \frac{\theta_n \psi_n (1+\psi_n)\ldots(k-1+\psi_n)}{x^{k+\psi_n}}\right]^{i_k},$$

où

$$A = a_0 x^q + \ldots + a_q.$$

Considérons le produit Π qui multiplie A : son terme général en $\frac{1}{x}$ a pour exposant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} E = {} & m_1^0 \psi_\alpha + \ldots + m_{j_0}^0 \psi_\delta + m_1^1 (1+\psi_{\alpha_1}) + \ldots + m_{j_1}^1 (1+\psi_{\delta_1}) + \ldots \\ & + m_1^k (k+\psi_{\alpha_k}) + \ldots + m_{j_k}^k (k+\psi_{\delta_k}), \end{aligned}\right.$$

avec

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} & m_1^0 + \ldots + m_{j_0}^0 = i_0, \\ & m_1^1 + \ldots + m_{j_1}^1 = i_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & m_1^k + \ldots + m_{j_k}^k = i_k, \end{aligned}\right.$$

et pour coefficient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} B = {} & \frac{i_0!}{m_1^0!\ldots m_{\mu_0}^0!}\cdots\frac{i_k!}{m_1^k!\ldots m_{\mu_k}^k!}(-1)^{k i_k}\theta_\alpha^{m_1^0}\ldots\theta_{\alpha_k}^{m_1^k}\ldots\theta_{\delta_{\mu_k}}^{m_{\mu_k}^k} \\ & \times \psi_{\alpha_1}^{m_1^1}\ldots\psi_{\delta_1}^{m_{\mu_1}^1}\ldots \\ & \times [(k-1+\psi_{\alpha_k})\ldots\psi_{\alpha_k}]^{m_1^k}\ldots[(k-1+\psi_{\delta_k})\ldots\psi_{\delta_k}]^{m_{\mu_k}^k}. \end{aligned}\right.$$

On aura en particulier dans Π un terme Θ_i d'exposant

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} E_i &= i_0''\psi_n + i_1''(1+\psi_n)+\ldots+i_k''(k+\psi_n) \\ &= (i_0''+i_1''+\ldots+i_k'')\psi_n + i_1''+2i_2''+\ldots+ki_k''. \end{aligned}\right.$$

avec le coefficient

$$(9)\qquad B_i = (-1)^{i_1''+\ldots+ki_k''}\theta_n^{i_0''+\ldots+i_k''}\psi_n^{i_1''+\ldots+i_k''}\ldots(k-1+\psi_n)^{i_k''}.$$

Posons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} i_0'+i_1'+\ldots+i_k' &= P, & i_0''+i_1''+\ldots+i_k'' &= P', \\ i_1'+2i_2'+\ldots+ki_k' &= N, & i_1''+2i_2''+\ldots+ki_k'' &= N'. \end{aligned}\right.$$

Le terme de degré E_i dans Π donnera dans le second membre de (4) des termes de degré $E_i - \varepsilon_i$, avec $0 \leqq \varepsilon_i \leqq q$, termes qui ne seront pas tous nuls, dont l'un au moins devra se réduire avec d'autres de même degré, et qui donnent lieu pour chaque valeur de n à un nombre fini de relations de la forme

$$(11)\qquad \Sigma a B = 0.$$

Or le degré d'un de ces autres termes est de la forme $E - \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon \leqq \chi$, χ étant le plus grand degré des polynomes A, et l'on devra avoir

$$(12)\qquad E_i = E - \varepsilon + \varepsilon_i.$$

Cherchons les termes du deuxième membre de (4) pouvant satisfaire à cette égalité, c'est-à-dire à

$$(13)\qquad P'\psi_n + N' = m_1^0\psi_\alpha + \ldots + m_{\mu_k}^k\psi_{\delta_k} + N - \varepsilon + \varepsilon_i.$$

Pour toute valeur de P, le second membre de (13) devra, si n est suffisamment grand, être tel que P′ des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$, en nombre $i_0 + \ldots + i_k = P$ [chacune étant comptée ici autant de fois que l'indique son coefficient dans le second membre de (13)], soient égales à n, puisque $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} > \eta$, quel que soit η, quand n est assez grand; les autres, en nombre $P - P' \geqq 0$, seront telles que la somme des quantités ψ_α correspondantes soit égale à $N' - N + \varepsilon - \varepsilon_1$, c'est-à-dire limitée.

Ceci posé :

1° Supposons P′ maximum et $= P''$, parmi les quantités P, en nombre limité et $\leqq$ au nombre ν des termes de (1); toutes les quantités P sont égales à P″ dans (13); il faut $N = N - \varepsilon + \varepsilon_1$. Les coefficients B correspondants sont tous de la forme B_1; le nombre des termes correspondants qui entrent dans (11) est $\leqq$ au nombre des quantités P égales à P″ dans (1). Il doit donc y avoir deux termes distincts de (1) pour lesquels P″ a la même valeur.

2° Supposons P′ quelconque. Le nombre des systèmes de quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ telles que $\mu_1^0 \psi_\alpha + \ldots = N' - N + \varepsilon - \varepsilon_1 (\mu_1^0 \leqq m_1^0, \ldots)$ est limité, puisque les valeurs négatives de ψ_α sont limitées inférieurement. Il en résulte que le nombre des termes qui entrent dans (11) sera limité et $\leqq \nu'$, ν' étant limité.

Ce n'est pas tout : B_1 est de l'ordre de grandeur de

$$\theta_n^{P'} \psi_n^{N'} \tag{14}$$

d'après (9). Le nombre des termes de (11) étant fini, il devra y avoir un terme au moins de (11) autre que B_1 et du même ordre de grandeur au moins que B_1. Pour les valeurs de $P \geqq P'$, il devra y avoir au moins un coefficient B pour lequel P′ des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont égales à n, les $P - P'$ autres étant limitées, et tel que B soit d'ordre

$$\geqq \theta_n^{P'} \psi_n^{N'}.$$

Les coefficients $\theta_\alpha, \ldots$ correspondant à des valeurs de $\alpha, \ldots$ limitées, sont limités : par suite B est d'ordre $\leqq \theta_n^{P'} \psi_n^{N}$. Donc, il faudra qu'on ait un terme B pour lequel $N \geqq N'$. Si en particulier N′ est maximum et $= N_1''$, il faut $N = N_1''$.

Considérons alors les deux cas suivants :

Condition C.

1° $P = P''$. — Parmi les termes B correspondants d'ordre $\theta''_n \psi_{1n}^{N}$, il y en a pour lesquels N est maximum et $= N''$. Pour ceux-là, ψ_{1n}^{N} et B sont d'ordre maximum ; il devra y en avoir deux au moins de cette espèce. *A fortiori* devra-t-il y avoir deux termes pour lesquels $P' = P''$ parmi les termes de (1).

Condition D.

2° $N' = N''_1$. — Parmi les termes correspondants, prenons tous ceux pour lesquels P a la même valeur maxima P_1 ; il devra y en avoir au moins deux.

L'application des conditions C et D ci-dessus donne alors les résultats suivants :

1° Quand (1) est d'ordre zéro, c'est-à-dire est un polynome entier en x, y, la condition C suffit à montrer que (4) est impossible : il n'y a qu'un terme pour lequel $P' = P''$.

2° Quand (1) est du premier ordre, la condition C, par exemple, montre que l'on devrait avoir deux termes distincts correspondant à $P'' = i_0 + i_1$, $N'' = i_1$ dans (1), c'est-à-dire à un même système de valeurs de i_0 et i_1, ce qui est impossible.

3° Quand (1) est d'ordre quelconque k, et que, pour tous les termes de (1) pour lesquels $P = P''$, $N = N''$, ou $N = N''_1$, $P = P''_1$, $n - 2$ des quantités $i_0, i_1, \ldots, i_k$ ont même valeur deux à deux, il en est de même des deux autres. Ces termes se réduisent à un, et les conditions C et D ne peuvent avoir lieu.

4° Ce sera encore le cas, par exemple, pour les équations différentielles rationnelles en x et y, et linéaires par rapport aux dérivées de y. La valeur maxima N''_1 de N est égale à k, et la valeur P_1 correspondante est $i'_0 + 1$, i'_0 étant le degré en y du polynome entier en x, y qui forme le coefficient de $\frac{d^k y}{dx^k}$. Il n'y a qu'un terme correspondant et la condition D n'est pas satisfaite.

La condition C conduirait aux mêmes résultats.

5° Considérons parmi les équations différentielles d'ordre k celles qui sont complètes par rapport aux dérivées de y qui y entrent, c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome complet de même degré j séparément par rapport à chacune de celles des quantités y', y'', ..., $y^{(k)}$ qui entrent dans (1), en nombre l. La valeur maxima N'_1 de N' correspond au terme pour lequel tous les y', y'', ..., $y^{(k)}$ qui entrent dans (1) ont l'exposant j et qui a pour coefficient un polynome quelconque $M(x, y)$. La valeur maxima correspondante P'_1 de P' est unique et est relative au terme de $M(x, y)$ d'exposant maximum en y. La condition D n'est donc pas remplie.

6° Considérons enfin les équations différentielles rationnelles en x et y dont le premier membre forme un polynome de degré total λ par rapport à celles des quantités y', y'', ..., $y^{(k)}$ qui y entrent, en nombre l, ce polynome comprenant tous les termes possibles de la forme

$$G y'^{a_1} y''^{a_2} \ldots y^{(k)a_l}, \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_l = \lambda,$$

G étant un polynome entier en x et y.

La valeur maxima de N est évidemment $k\lambda$, et la condition D n'est pas remplie.

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit la fonction*

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est quelconque, et ψ_n une fonction croissante, qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, mais qui est telle que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n :

I. *φ ne peut être une fonction algébrique de x.*

II. *φ ne peut être solution d'une équation différentielle de premier ordre, rationnelle en x, y, y'.*

III. *φ ne peut être solution des équations différentielles rationnelles en x et y, et linéaires par rapport aux autres dérivées de y.*

IV. *φ ne peut être solution des équations différentielles rationnelles d'ordre k complètes par rapport à celles des dérivées de y qui y entrent en nombre l, c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome de même degré j séparément par rapport à ces quantités avec un terme d'exposant total lj.*

V. *φ ne peut être solution des équations différentielles rationnelles en x et y d'ordre k, dont le premier membre forme un polynome de degré total λ par rapport à celles des quantités y', y'', ..., y^{k} qui y entrent, si ce polynome comprend tous les termes possibles de la forme*

$$G y'^{a_1} y''^{a_2} \ldots (y^{k})^{a_l}, \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_l = \lambda,$$

G étant un polynome entier en x et y.

On peut même aller un peu plus loin pour les équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients rationnels.

Une fonction

$$\Phi = \sum \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}$$

n'en peut être une solution que si

$$A_0 \Sigma (-1)^k \theta_n \psi_n (1 + \psi_n) \ldots (k - 1 + \psi_n) x^{-k-\psi_n} + \ldots$$
$$+ A_k \Sigma \theta_n x^{-\psi_n} = T.$$

Si $\psi_n - \psi_{n-1}$ croît indéfiniment avec n, pour n assez grand, l'ensemble des termes dont l'exposant ne diffère que d'une quantité finie de $-\psi_n$ doit se réduire à zéro. On en conclura un nombre fini de relations de la forme

$$[a_k \psi_n (1 + \psi_n) \ldots (k - 1 + \psi_n) + \ldots + a_0] \theta_n = 0,$$

ce qui exige, quand n est assez grand, $a_k = 0$, et A_0 devrait se réduire à zéro. Donc :

Théorème II. — *La fonction*

$$\Phi = \sum_1^\infty {}_n \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}$$

ne peut être solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x que si $\psi_n - \psi_{n-1}$ ne croît pas indéfiniment avec n.

III.

On peut établir des théorèmes similaires, dans le cas où la croissance de ψ_n est moins rapide, moyennant certaines hypothèses que nous préciserons tout à l'heure. Supposons seulement que $\psi_{n+1} - \psi_n \geqq 1$.

Tout ce que nous avons dit dans le § II reste vrai jusqu'à (12) inclusivement.

Cherchons les termes du deuxième membre de (4) pouvant satisfaire à (12), c'est-à-dire à

$$(15) \qquad P'\psi_n + N' = m_1^0\psi_\alpha + \ldots + m_{j_k}^k\psi_{\delta_k} + N - \varepsilon + \varepsilon_1.$$

Pour toute valeur de P' le second membre de (15) devra, si n est suffisamment grand, être tel que

$$(16) \qquad P'\psi_n \geqq \psi_\beta + \varepsilon',$$

ε' étant fini, et β la plus grande des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$. On en conclut

$$(17) \qquad \beta \leqq \chi_n,$$

χ_n étant une fonction croissante de n.

Pour toute valeur de

$$P = m_1^0 + \ldots + m_{j_k}^k,$$

on aura alors comme limite supérieure du nombre des solutions de (15), quand ε et ε_1 sont donnés, le nombre des systèmes de valeurs que peuvent prendre P quantités $a, b, \ldots, d$ quand on donne à chacune d'elles les valeurs $1, 2, \ldots, \chi_n$, c'est-à-dire $\chi_n^P \leqq \chi_n^{P''}$, si P'' désigne encore le maximum de P pour tous les termes de (1). Le nombre des systèmes de valeurs de $\varepsilon_1 - \varepsilon$ est fini et $\leqq \rho$; par suite chaque produit AH, auquel correspond une même valeur de N et de P, pourra fournir au plus $\rho\chi_n^{P''}$, termes distincts satisfaisant à (15), et l'ensemble des produits AH au plus $\sigma\chi_n^{P''}$ termes, σ étant fini.

Ceci posé, soit $P = P''$; les coefficients B qui entrent dans (11) sont en nombre $\leq \sigma \chi_n^{P''}$. (12) devient

$$(18) \qquad P''\psi_n + N' = m_1^0 \psi_\alpha + \ldots + m_k^k \psi_{\delta_k} + N - \varepsilon + \varepsilon_1 ;$$

on a

$$m_1^0 + \ldots + m_k^k \leq P''.$$

Si toutes les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont $\leq n$, (18) est impossible pour n assez grand, à moins que

$$(19) \qquad m_1^0 + \ldots + m_k^k = P''.$$

Par conséquent, les termes de (11) se divisent en deux catégories : 1° ceux pour lesquels (19) a lieu et $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont $\leq n$; pour eux, $P = P'$; 2° ceux pour lesquels une au moins des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ est $> n$.

Considérons la première catégorie de termes : s'il n'y a qu'un terme de (1) pour lequel $P = P''$, les termes de la première catégorie se réduisent à un [1] dès que n est grand, si ε est convenablement choisi. C'est par exemple le cas quand F, dans (1), est un polynome entier en x et y, ou encore quand F ne contient qu'une seule des quantités $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}$, et est de la forme $F\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = 0$ (cas des fonctions abéliennes et de leurs intégrales successives). On peut prendre alors

$$\psi_n = n + \nu, \qquad \chi_n = P''n + \rho_1 \ (\rho_1 \text{ fini}),$$

(c'est encore le cas des équations de Riccati et de Bernoulli, à coefficients rationnels).

Plus généralement, même si le nombre des termes de (1) pour lesquels $P = P''$ est > 1, d'après (18), une des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ ne

---

[1] Si q' est le degré du terme le moins élevé dans AII, il n'y a dans le produit qu'un terme de degré $P''\psi_n + N' - q'$ qui ne se réduit avec aucun autre tel que $\alpha, \ldots, \delta_k \leq n$.

pourrait être $< n$ que si

$$\psi_n \leqq \psi_{n-1} + A, \tag{20}$$

ce qui est impossible dès que $\psi_n - \psi_{n-1}$ dépasse une certaine quantité finie fonction de N et des degrés des polynomes A [1], *a fortiori* si $\psi_n - \psi_{n-1}$ croît indéfiniment avec n.

Supposons que ceci ait lieu : si toutes les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont égales à n, il faut

$$m_1^0 + \ldots + m_{\mu}^k = P''.$$

Or, les termes B correspondants sont de l'ordre de grandeur de $\theta_n^{P''} \psi_n^{N''}$; leur nombre est d'ailleurs limité, car il y en a au plus un pour chaque produit H. Supposons alors que parmi eux il n'y en ait qu'un pour lequel $N' = N''$; la somme des modules des autres sera d'ordre inférieur à $\theta_n^{P''} \psi_n^{N''}$.

Finalement, dans tous ces cas, l'ensemble des termes de la première catégorie donne dans (11) une somme de l'ordre de $\theta_n^{P''} \psi_n^{N''}$. Supposons qu'il en soit ainsi, et considérons maintenant l'ensemble des termes B de la deuxième catégorie : pour que (11) soit possible, il faudra évidemment, dans tous les cas précités, que la somme des modules de ces termes, chacun multiplié par un facteur constant et limité, soit au moins de l'ordre de grandeur de $|\theta_n^{P''} \psi_n^{N''}|$, c'est-à-dire *a fortiori* que

$$\left|\theta_n^{P''} \psi_n^{N}\right| \leqq \lambda_2 \Sigma \left|\theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\delta_k}^{m_\mu^k} \psi_\alpha^{m_1^1} \ldots \left(\psi_{\delta_k} \ldots (k-1+\psi_{\delta_k})\right)_{\mu}^{m_\mu^k}\right|. \tag{21}$$

Or, si $|\theta_n|$ est une fonction décroissante de n que l'on peut toujours

---

[1] Soit, par exemple, $L' > \psi_{n+1} - \psi_n > L$, d'où $\psi_n > nL + l$, $\psi_{\theta n} > \theta n L + l_1$, $\psi_n < nL' + l'$, $P'\psi_n < P'nL' + P'l'$. Posant $\theta n \leqq \beta < (\theta + 1)n$, (16) donne

$$l_1 + \theta n L < \psi_{\theta n} \leqq \psi_\beta \leqq P'\psi_n - \varepsilon' < P'nL' + l''.$$

On peut prendre

$$\chi_n = \frac{P'nL' + l'' - l_1}{L} + n.$$

supposer telle que $|\theta_1| < 1$, on a ici

$$|\theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\delta_k}^{m_{\beta k}^k}| \leqq |\theta_{n+1}|.$$

On a d'ailleurs, d'après (16),

$$\psi_\alpha^{m_1^1} \ldots [\psi_{\delta_1} \ldots (k-1+\psi_{\delta k})]^{m_{\beta k}^k} \leqq \lambda_3 (P^\nu \psi_n + \nu_1)^N \leqq \lambda_3 (P^\nu \psi_n + \nu_1)^{N''}$$

N''_1 étant la valeur maxima des quantités N_1, et λ_3 étant fini. Le nombre des termes du deuxième membre de (11) est d'ailleurs au plus égal à $\sigma \chi_n^{P''}$, et (21) donne

$$|\theta_n^{P''} \psi_n N''| \leqq \lambda_4 |(P^\nu \psi_n + \nu_1)^{N''_1} \chi_n^{P''} \theta_{n+1}|,$$

λ_4 étant fini, ou encore

$$|\theta_n^{P''}| \leqq \lambda_5 |\theta_{n+1} \chi_n^{P''} \psi_n^{\nu'_1}|,$$

λ_5 étant fini.

Dès lors,

$$(22) \qquad |\theta_{n+1}| \geqq \left| \frac{\theta_n^{P''}}{\lambda_5 \chi_n^{P''} \psi_n^{\nu'_1}} \right|.$$

La fonction ψ_n étant donnée, par suite la fonction χ_n on une limite supérieure ϖ_n, ceci sera impossible dès que

$$(23) \qquad |\theta_{n+1}| < \left| \frac{\theta_n^{P''}}{\lambda_5 \chi_n^{P''} \psi_n^{\nu'_1}} \right|;$$

ou, *a fortiori*, dès que

$$(24) \qquad |\theta_{n+1}| < \left| \frac{\theta_n^{P''}}{\lambda_5 \varpi_n^{P''} \psi_n^{\nu'_1}} \right|.$$

Dans le cas des fonctions algébriques ou des fonctions abéliennes et de leurs intégrales successives, on peut prendre $\psi_n = n + \nu'$,

$$\chi_n = P^\nu n + \rho_1,$$

et (11) sera impossible dès que (23) a lieu, par exemple quand $\theta_n = \zeta^{-n^2}$, ζ étant > 1, puisque

$$\zeta^{-n+1} < \frac{\zeta^{-n^2 P''}}{\lambda_5 (P'' n + \rho_1)^{P''} (n + \nu')^{\nu'_1}}$$

pour n assez grand.

Soit encore une équation (1) donnée. Si $\psi_n - \psi_{n-1}$ reste compris entre deux limites finies L et L' définies comme précédemment, et suffisamment grandes, (11) est encore impossible quand $\theta_n = \zeta^{-n^2}$.

Enfin supposons que $\psi_n - \psi_{n-1}$ croisse indéfiniment avec n; si la fonction ψ_n donne, d'après (16), $\beta \leqq Rn$, R étant fini (ce qui a lieu, par exemple, quand $\psi_n = n^m$, car on a

$$\rho_2 + P'' n^m < R^m n^m$$

dès que

$$R > \sqrt[m]{P'' + 1},$$

n étant assez grand), on peut prendre

$$\chi_n^{P''} = (Rn)^{P''}, \qquad \psi_n^{\nu'_1} = n^{m\nu'_1}.$$

(23) aura lieu quand $\theta_n = \zeta^{-n^2}$, et (1) sera alors impossible.

Au surplus, quel que soit le mode de croissance de ψ_n et de χ_n, (23) donne toujours le moyen de déterminer le mode de décroissance de θ_n de façon que (11) soit impossible, pourvu que $\psi_n - \psi_{n-1}$ croisse indéfiniment avec n [1].

Condition C'.

En résumé, on peut formuler ici une condition analogue à la condition C :

Dans le cas où ψ_n et θ_n sont tels que

$$|\theta_{n+1}| < \left| \frac{|\theta_n|^{P''}}{\chi_n^{P''} \psi_n^{\nu'_1} \lambda_5} \right|,$$

---

[1] On pourrait peut-être, par une discussion un peu plus approfondie améliorer l'inégalité (23) et la préciser : nous n'insistons pas.

il doit y avoir au moins deux termes de (1) correspondant à la valeur maxima P'' de P dès que $\psi_n - \psi_{n-1} \geq 1$.

Quand $\psi_n - \psi_{n-1}$ croît indéfiniment avec n, parmi les termes de (1) correspondant à la valeur maxima P'' de P il doit y en avoir deux au moins pour lesquels N est maximum et $= N''$. Cette condition est même nécessaire dès que $\psi_n - \psi_{n-1}$ dépasse une certaine limite finie fonction des coefficients, des exposants et de l'ordre de (1).

L'application de cette condition donne alors les résultats suivants :

1° Quand (1) est un polynome entier en x et y, ou en x et $\frac{d^k y}{dx^k}$, la condition C′ n'est pas remplie et il n'y a qu'un terme pour lequel $P = P''$. On pourra prendre ici $\psi_n - \psi_{n-1} = 1$.

2° Quand (1) est du premier ordre, la condition C′ (deuxième partie) montre que l'on devrait avoir deux termes distincts correspondant à $P'' = i_0 + i_1$, $N'' = i_1$, c'est-à-dire à un même système de valeurs de i_0 et i_1, ce qui n'est pas.

3° Quand (1) est d'ordre quelconque k, et que, pour tous les termes de (1) pour lesquels $P = P''$, $N = N''$, $n - 2$ des quantités $i_0, \ldots, i_k$ ont même valeur; il en est de même des deux autres. Ces termes se réduisent à un, et la condition C′ (deuxième partie) ne peut avoir lieu.

4° Ce sera encore le cas pour les équations différentielles rationnelles en x et y, et linéaires par rapport aux dérivées de y. On a ici

$$P = i_0, \qquad N = 0$$

pour les termes ne contenant pas de dérivées de y, et

$$P' = i'_0 + 1, \qquad N' = \lambda > 0$$

pour les autres termes.

Deux valeurs de N' ne peuvent être égales sans que les valeurs de P' ou de P diffèrent. La condition C′ (deuxième partie) n'a pas lieu.

5° Considérons parmi les équations différentielles rationnelles d'ordre k celles qui sont complètes par rapport à y et aux dérivées de y, c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome

complet de même degré par rapport à toutes les quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui entrent dans (1). Si j est la valeur maxima commune de $i_0, \ldots, i_k$, la valeur maxima de P est lj, l étant le nombre des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui entrent dans (1), et il n'y a qu'un terme pour lequel P a cette valeur. On pourra prendre ici $\psi_n - \psi_{n-1} = 1$. C'est, en particulier, le cas quand une seule de ces quantités entre dans (1) (cas particuliers indiqués ci-dessus). La condition C′ (première partie) n'est pas remplie.

6° Considérons enfin les équations différentielles rationnelles en x, $y, \ldots, y^{(k)}$ dont le premier membre forme un polynome de degré total λ par rapport à celles des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui y entrent, en nombre l. Si ce polynome comprend tous les termes possibles de la forme

$$G y^{a_0} \ldots y^{(k) a_l}, \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_l = \lambda,$$

G étant un polynome entier en x, la valeur maxima de P est évidemment λ; les valeurs N sont $a_1 + \ldots + k a_k \leqq k\lambda$, et la valeur maxima de N pour les termes en question, égale à $k\lambda$, correspond au terme unique $G y^{(k)\lambda}$. La condition C′ (deuxième partie) n'est pas remplie.

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit la fonction*

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où ψ_n est une fonction croissante de n, qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, $\psi_{n+1} - \psi_n$ croissant indéfiniment avec n.

Soit encore

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A(x) y^{i_0} \ldots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k} = 0$$

une équation différentielle rationnelle en x, y et ses dérivées, les $A(x)$ étant des polynomes entiers en x.

Si ω_n [1] *est une certaine fonction croissante de* n *qui dépend de* ψ_n, *et si l'on a*

$$|\theta_{n+1}| < \left|\frac{\theta_n}{\omega_n}\right|^{\nu}, \tag{25}$$

quelle que soit la constante ν *pour* n *assez grand :*

I. φ *ne peut être ni fonction algébrique, ni fonction abélienne, ni une intégrale d'une fonction abélienne ;*

II. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles du premier ordre en* x, y, y' ;

III. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles en* x *et* y, *et linéaires par rapport aux autres dérivées de* y ;

IV. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles* (1) *d'ordre* k *complètes par rapport à celles des quantités* $y, y', \ldots, y^k$ *qui y entrent, en nombre* l, *c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome complet de même degré* j *séparément par rapport à celles des quantités* $y, y', \ldots, y^k$ *qui y entrent, avec un terme d'exposant* lj ;

V. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles d'ordre* k *dont le premier membre forme un polynome de degré total* λ *par rapport à celles des quantités* $y, y', \ldots, y^{(k)}$ *qui y entrent, en nombre* l, *si ce polynome comprend tous les termes possibles de la forme*

$$G\, y^{a_0} y'^{a_1} \ldots y^{(k)a_l}, \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_l = \lambda,$$

G *étant un polynome entier en* x.

Quand $\theta_n = \zeta^{-n}$ $(\zeta > 1)$, *et que* $\psi_n = n^m$ $(m > 1)$, *la condition* (25) *est toujours satisfaite.*

Les propriétés I *et* IV *restent vraies quand* $\psi_{n+1} - \psi_n$ *est fini et* > 1. *Ainsi elles sont applicables à la fonction* φ *quand* $\theta_n = \zeta^{-n}$.

---

[1] Ici $\omega_n^2 = \lambda_{\alpha\beta} \psi_n^{\nu_\alpha} \psi_n^{\nu_\beta}$.

IV.

On peut obtenir des résultats plus généraux sur les fonctions de la forme (2) et les équations de la forme (1) quand on fait sur ψ_n des hypothèses plus restrictives.

En effet, supposons encore que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n; prenons dans le produit H le terme en $\frac{1}{x}$ obtenu en formant le produit de P termes ayant pour exposants respectifs, à une quantité finie près :

$$\psi_n, \quad \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad \psi_{n+P-1};$$

ce terme pourra être obtenu en attribuant successivement à $\alpha, \ldots, \delta_k$ les valeurs distinctes $n, n+1, \ldots, n+P-1$ ($m_1^0 = \ldots = m_{j^k}^k = 1$) dans un ordre quelconque; il aura alors dans H l'exposant

$$(26) \qquad E_2 = \psi_{n+P-1} + \psi_{n+P-2} + \ldots + \psi_n + N,$$

et pour coefficient

$$(27) \quad B_2 = \Sigma \lambda_\sigma i_0! \ldots i_k! (-1)^N \theta_{n+P-1} \ldots \theta_{n+1} \theta_n \times \psi_{n+P-1}^{\sigma_1} \ldots \psi_n^{\sigma_P};$$

on a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_P = N,$$

et λ_σ est fini, *positif*, et limité supérieurement et inférieurement quel que soit n; parmi les P quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_P$, il y en a i_k égales à k, i_{k-1} à $k-1, \ldots, i_1$ à 1, i_0 à 0, et cela de toutes les manières possibles [1].

Si l'on suppose $P = P''$, le terme correspondant de degré E_2 donnera encore dans le second membre de (4) des termes qui ne pourront se

---

[1] On ne doit considérer ici comme distincts deux termes de B_2 que quand deux des systèmes de valeurs des exposants $\sigma_1, \ldots, \sigma_P$ correspondants sont distincts par l'ordre de ces quantités.

réduire qu'avec ceux d'exposants de la forme (12). Ces exposants devront satisfaire à

$$(28)\qquad \psi_{n+P'-1}+\psi_{n+P'-2}+\ldots+\psi_n = m_1^0\psi_\alpha+\ldots+m_{l_1}^{l}\psi_{\delta_1}+\omega,$$

où ω est fini, et l'on en conclut que le second membre doit être tel, comme le premier, que $P=P'$, et qu'une et une seule des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ soit égale à une des quantités $n, n+1, \ldots, n+P'-1$. Les termes de (4) en question sont ceux que nous avons considérés tout d'abord; leur nombre est limité.

Pour que (11) soit possible, il faudra donc que, parmi les quantités B_2 dont l'ordre de grandeur en n est maximum, et pour lesquelles $P=P'$, il y en ait au moins deux de même ordre, provenant de deux termes différents de (4), c'est-à-dire *a fortiori* deux telles que

$$(29)\qquad \psi_{n+P'-1}^{\sigma_1}\ldots\psi_n^{\sigma_{P'}} = \lambda\,\psi_{n+P'-1}^{\sigma'_1}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P'}},$$

λ étant fini et limité supérieurement et inférieurement, les quantités correspondantes $i, i_{k-1}, \ldots, i_0$ n'étant pas toutes égales aux quantités $i'_k, i'_{k-1}, \ldots, i'_0$ correspondantes. On peut supposer que σ_τ soit la première des quantités $\sigma_1, \ldots, \sigma_{P'}$ qui ne soit pas égale à la quantité correspondante σ'_τ et $\tau < P'$; en effet, si l'on avait $\sigma_1=\sigma'_1$, $\sigma_2=\sigma'_2, \ldots, \sigma_{P'-1}=\sigma_{P'-1}$, on aurait $\sigma_{P'}=\sigma'_{P'}$; parmi les quantités $\sigma_1, \ldots, \sigma_{P'}$, il y en aurait i_0 égales à 0, i_1 égales à 1, ..., i_k égales à k, et de même i'_0 égales à 0, ..., i'_k égales à k; donc $i_0=i'_0, \ldots, i_k=i'_k$, et les deux termes B_2 correspondants coïncideraient, contrairement à ce qui précède. On aura alors

$$(30)\qquad \psi_{n+P'-\tau}^{\sigma_\tau}\ldots\psi_n^{\sigma_{P'}} = \lambda\,\psi_{n+P'-\tau}^{\sigma'_\tau}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P'}},$$

d'où, si, par exemple, $\sigma_\tau > \sigma'_\tau$,

$$(31)\qquad \psi_{n+P'-\tau}^{\sigma_\tau-\sigma'_\tau} = \lambda\,\psi_{n+1+P'-\tau-1}^{\sigma_{\tau+1}-\sigma'_{\tau+1}}\ldots\psi_n^{\sigma_{P'}-\sigma'_{P'}},$$

avec $\sigma_\tau-\sigma'_\tau=h$, $\tau<P'$, et

$$(32)\qquad \psi_{n+P'-\tau-1} = \lambda\,\psi_{n+P'-\tau-1}^{u_{\tau+1}}\ldots\psi_n^{u_{P'}},$$

$\mu_{\tau+1}, \ldots, \mu_{\Gamma^\nu}$ étant rationnels, positifs ou négatifs, et de dénominateurs $\leqq k$.

Nous ne chercherons pas provisoirement à discuter l'égalité (32). Nous remarquerons seulement qu'il n'est pas difficile d'imaginer des lois de croissance de ψ_n telles que (32) soit impossible. Il suffit de prendre

$$\psi_{n+1} = \nu \psi_n^{\varpi_n},$$

ν étant une quantité qui reste limitée supérieurement et inférieurement et ϖ_n une fonction croissante de n qui croît indéfiniment avec n. Il faudrait, en effet, pour n assez grand

$$\psi_{n+\Gamma^\nu-\tau} < \lambda_1 \psi_{n+\Gamma^\nu-1}^{\mu_{\tau+1}+\ldots+\mu_{\Gamma^\nu}},$$

ce qui est impossible dès que n surpasse une certaine limite. Donc :

Théorème IV. — *Soit la fonction*

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est quelconque et ψ_n une fonction croissante de n qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, mais qui est telle que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n : φ ne peut satisfaire à une équation différentielle rationnelle d'ordre quelconque que si l'on a au moins une relation de la forme

$$\psi_{n+\nu} = \lambda \psi_{n+\nu-1}^{\mu_1} \ldots \psi_n^{\mu_\nu}$$

(ν entier, $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ rationnels ne peuvent avoir qu'un nombre limité de valeurs ne dépendant que des exposants de y et de ses dérivées dans l'équation donnée et de l'ordre k de cette équation, les dénominateurs $p_1, \ldots, p_\nu$ étant $\leqq k$).

En particulier, φ ne satisfait à aucune équation différentielle rationnelle quand $\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$, μ_n étant une fonction de n qui croît indéfiniment avec n, et λ une quantité finie $\neq 0$ et limitée supérieurement et inférieurement.

Remarque. — Les résultats obtenus dans les quatre premiers paragraphes s'étendent évidemment aux séries obtenues en remplaçant $\frac{1}{x}$ par $x - x_0$ et qui pourraient représenter le développement d'une solution aux environs du point x_0 (réel ou imaginaire).

V.

Les résultats précédemment obtenus ne sont pas spéciaux aux séries ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x; ils s'étendent aux séries de polynomes et de fractions rationnelles, par suite aux fractions continues.

Nous nous contenterons d'indiquer ici une partie de ces extensions en employant un autre mode de démonstration qui donne des résultats plus complets à certains égards.

Soit d'abord

$$(33) \qquad \varphi_1 = P_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable x, P_0 étant un polynome; nous supposons la série $\varphi_1 - P_0$ convergente aux environs du point $x = \infty$ qui est ainsi un pôle ou un point ordinaire pour φ_1.

Désignons par

$$(34) \qquad Q_0, \quad Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots$$

une suite de polynomes de degrés $q_0, q_1, q_2, \ldots > 0$; on pourra toujours, et d'une seule manière, mettre φ_1 sous la forme

$$(35) \qquad \varphi_1 = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots,$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ étant des polynomes entiers en x de degrés $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots <$ ceux de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ respectivement.

En effet, si

$$(\varphi_1 - P_0) = \varepsilon_1,$$

$\varepsilon_1 Q_1$ sera une série comprenant un polynome R_1 de degré inférieur

d'une unité au moins à celui de Q_1 et une partie ε_2 de la forme

$$\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots$$

$$\varphi_1 - P_0 = \frac{R_1}{Q_1} + \frac{\varepsilon_2}{Q_1}.$$

On mettra, de la même manière, ε_2 sous la forme

$$\varepsilon_2 = \frac{R_2}{Q_2} + \frac{\varepsilon_3}{Q_2},$$

d'où

$$\varphi_1 - P_0 = \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \frac{\varepsilon_3}{Q_1 Q_2}, \ldots.$$

Par analogie avec ce que nous avons dit pour les *systèmes de numération généralisés*, nous dirons que (34) est la *base d'un système de représentation* aux environs du point $x = \infty$; (35) est la représentation de φ_1 dans ce système (au cas, bien entendu, où φ_1 est une série convergente ou sommable). On pourra évidemment supposer

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = \ldots;$$

le système de représentation correspond alors aux systèmes de numération ordinaires.

Désignons par $\frac{\varpi_n}{S_n}$ la fraction $\varphi_1 - \frac{\varepsilon_{n+1}}{Q_1 \ldots Q_n}$, et soit encore l'équation différentielle

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A y^{i_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k},$$

dont φ_1 est solution.

Soit $y = \eta_n + h_n$, $y' = \eta'_n + h'_n$, $\ldots$, $y^{(k)} = \eta_n^{(k)} + h_n^{(k)}$, en supposant que η_n soit une fonction de x qui diffère d'aussi peu qu'on veut de y ainsi que ses dérivées dès que $|x| > \mu$ (μ fini). Prenons pour η_n la fraction $\frac{\varpi_n}{S_n}$; on a

$$\frac{\varpi_n}{S_n} = P_0 + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 \ldots Q_n} = \frac{P_0 Q_1 \ldots Q_n + \ldots + R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n}$$

avec $S_n = Q_1 Q_2 \ldots Q_n$.

Supposons encore que les zéros [1] des polynomes (34) aient tous leurs modules limités supérieurement; prenons μ supérieur à ce module; on a $r_1 < q_1, \ldots, r_n < q_n, \ldots$

$$(36) \qquad h_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{Q_1 \ldots Q_n} = \frac{R_{n+1}}{S_{n+1}} + \ldots = \frac{\gamma_0}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}}},$$

si $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = s_n$, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ finis > 0:

$$h'_n = \frac{R'_{n+1} S_{n+1} - S'_{n+1} R_{n+1}}{S^2_{n+1}} + \ldots$$

est d'ordre plus petit, ainsi que toutes les autres dérivées de h.

On aura alors

$$(37) \quad \begin{cases} F(x, \gamma_{1n} + h_n, \ldots, \gamma_{1n}^{(k)} + h_n^{(k)}) \\ \quad = F(x, \gamma_{1n}, \ldots, \gamma_{1n}^{(k)}) + (h_n F'_y + \ldots + h_n^{(k)} F'_{y^{(k)}})(1 + \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

ε tendant vers 0 quand $h_n, \ldots, h_n^{(k)}$ tendent vers 0. $|x|$ croissant indéfiniment. On peut assigner à $|\varepsilon|$ une limite supérieure donnée *a priori* aussi petite qu'on veut, pourvu qu'on prenne n et $|x|$ supérieurs à une limite assez grande. Alors

$$(38) \quad |F(x, \gamma_{1n}, \ldots, \gamma_{1n}^{(k)})| = |(h_n F'_y + \ldots + h_n^{(k)} F'_{y^{(k)}})(1 + \varepsilon)|.$$

Le premier membre est de la forme

$$|\Sigma A \gamma_{1n}^{i_0} \ldots \gamma_{1n}^{(k)\, i_k}|.$$

Or $|\gamma_{1n}| = \left|\frac{\varpi_n}{S_n}\right|$ est $= \frac{\beta_2}{x^{s_n}}$. On voit sans peine que $|\gamma_{1n}^{(l)}|$ [2] est $= \frac{\beta_3}{x^{s_n - l + 1}}$.

Le terme général du premier membre de (38) est alors au moins

---

[1] Si l'on suppose tous les coefficients réels, il suffit de supposer les modules des zéros réels limités et x réel.

[2] γ_{1n}' est $\frac{\beta_3}{x^{s_n - l + 1}}$; en effet, soit

$$\gamma_{1n}^{(l-1)} = \frac{\alpha_{l-1}}{S_n^l}, \qquad \alpha_{l-1} \text{ étant un polynome,}$$

$$\gamma_{1n}^{(l)} = \frac{\alpha'_{l-1} S_n^l - l \alpha_{l-1} S_n^{l-1} S'_n}{S_n^{2l}} = \frac{\alpha'_{l-1} S_n - l \alpha_{l-1} S'_n}{S_n^{l+1}} = \frac{\beta_3}{x^{s_n - l + 1}}.$$

égal à

$$\frac{\beta_1}{x^{s_n[i_0+2i_1+\ldots+(k+1)i_k]-\sigma}} = \frac{\beta_1}{x^{s_n(P+N)-\sigma}},$$

si l'on pose, σ étant fini,

$$P = i_0 + i_1 + \ldots + i_k,$$
$$N = i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k.$$

Le deuxième membre de (38), si l'on suppose que φ_1 n'annule pas simultanément $F'_y, \ldots, F'^{(k)}_y$, est $\leqq \frac{\beta_1}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}+\delta}}$ (δ const.). On devra donc avoir, si ϖ est le minimum de $P + N$ pour les termes de (1)

$$\frac{\lambda}{x^{s_n\varpi-\sigma}} \leqq |F(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{k})| = |(hF'_y + \ldots + h_n^k F'^{(k)}_y)(1+\varepsilon)| \leqq \frac{\lambda'}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}+\delta}},$$

$$(39) \qquad s_{n+1} - r_{n+1} \leqq s_n\varpi + \delta_1 \qquad (\delta_1 \text{ fini}).$$

On pourra toujours, quand $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont donnés, prendre $q_{n+1} - r_{n+1}$ assez grand pour que cette condition ne soit pas remplie.

Soit, par exemple, $q_n = n!(1+\eta)$, $(0 \leqq \eta \leqq 1)$, $r_n = \eta' n!$ ($\lim \eta' = 0$ pour $n = \infty$, η' étant limité); il suffit qu'on ait

$$(n+1)! > \mu[n! + (n-1)! + \ldots + 1]\varpi$$

(μ limité), ou, *a fortiori*,

$$(n+1)! > \mu[n! + (n-1)!(n-1)]\varpi,$$

ce qui a lieu évidemment pour n assez grand.

Remarque. — Un raisonnement semblable est applicable quand φ_1 annule $F'_y, \ldots, F'^{(k)}_y$ sans annuler toutes les dérivées successives F'_{y^2}, $F'_{yy'}, \ldots$. La formule (37) est un peu modifiée.

En effet, supposons d'abord que φ_1 annule toutes les dérivées premières, secondes, etc., de F par rapport à $y, y', \ldots$. Soit i_k^0 le maximum de i_k, i_{k-1}^0 le maximum de i_{k-1} pour les termes tels que $i_k = i_k^0, \ldots, i_0^0$ le maximum de i_0 pour les termes tels que $i_k = i_k^0$, $i_{k-1} = i_{k-1}^0, \ldots, i_1 = i_1^0$: ces derniers se réduisent à 1. Soit, par exemple, $i_0^0 = i_1^0 = \ldots = i_j^0 = 0$,

avec $i_{f-1} \neq 0$; φ_1 doit annuler la dérivée

$$\frac{\partial^{\theta_k + \ldots + \theta_{f+1} - 1} F}{\partial^{(\theta_k)} y^{(k)} \partial^{\theta_{k-1}} y^{(k-1)} \ldots \partial^{\theta_{f+1} - 1} y^{(f-1)}}$$

qui est de la forme $Ay^{(f+1)} + A_1$. On n'a évidemment pas $A = 0$; si $A_1 = 0$, φ_1 serait un polynome (¹), cas que nous écarterons. Prenant encore une fois la dérivée en $y^{(f+1)}$, on est conduit à un résultat absurde; donc φ_1 n'annule pas toutes les dérivées de F par rapport à y, y', ..., y^k. L'emploi d'une formule analogue à (37) conduira à des conséquences semblables; mais on trouvera pour la limite supérieure du second membre de l'égalité qui remplace (38) une limite supérieure plus avantageuse que celle donnée par (39). Finalement (39) restera vrai dans tous les cas.

Le théorème que nous obtenons ainsi peut s'énoncer comme il suit :

Théorème V. — *Soit la série illimitée*

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots,$$

$P_0, R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ *étant des polynomes entiers en x de degrés $p_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ respectivement avec $r_1 < q_1, \ldots, r_n < q_n, \ldots$, les zéros réels de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ ayant leurs modules limités. Si φ est solution d'une équation différentielle rationnelle en x, $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}$, on doit avoir, dès que n est assez grand,*

$$q_{n+1} \leq (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + r_{n+1} + \delta_1$$

(ϖ entier qui ne dépend que de k et des exposants de $y, y', \ldots, y^k$ dans l'équation en question, δ_1 entier fini).

En particulier, φ ne peut être solution d'une pareille équation

---

(¹) Ce polynome serait de degré $k-1$. Le théorème V reste évidemment vrai quand φ_1 est une simple fraction rationnelle de la forme (35) avec $R_n \neq 0$, $R_{n+1} = R_{n+2} = \ldots = 0$, n étant assez grand.

quand $q_n = n!(1+\eta)$, *avec* $0 \leq \eta \leq 1$, $r_n = n!\eta'$ ($\lim \eta' = 0$ *pour* $n = \infty$).

Remarque. — Changeons, dans φ_1 et (1), $\frac{1}{x}$ en $z - z_0$: φ_1 devient le développement en série de fractions rationnelles d'une fonction de $z - z_0$ aux environs du point $z = z_0$: (1) devient une équation différentielle rationnelle d'ordre k en z. Les mêmes considérations restent évidemment applicables : si l'ordre de petitesse des termes successifs de φ_1 aux environs de $z = z_0$ croît suffisamment vite, φ ne peut être solution d'une équation différentielle rationnelle.

Application aux fractions continues illimitées.

Soit la fonction

$$\varphi = R_0 + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{R_2 + \ldots}},$$

supposée donnée par son développement en fraction continue illimitée, R_0, R_1, R_2, ... étant des polynomes [1] à coefficients réels, dont les racines réelles ont un module limité et $\leq \mu$, et tous positifs pour $x > \mu$: les réduites successives étant

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \ldots,$$

on a

$$\varphi = \frac{P_1}{Q_1} + \left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1}\right) + \ldots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) + \ldots,$$

ou

$$(10) \qquad \varphi = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{1}{Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{Q_{n-1} Q_n} + \ldots.$$

Le dernier membre est une série de fractions rationnelles à laquelle

---

[1] $\frac{P_n}{Q_n}$ étant irréductible et ayant une valeur finie pour $|x| > \mu$, Q_n n'a aucune racine réelle de module $> \mu$.

on peut appliquer ce qui précède sous certaines conditions [1]. On a

$$\psi = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{Q_1}{Q_1 Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{(-1)^n Q_1 \ldots Q_{n-2}}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots.$$

Soient encore

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad \ldots, \quad q_n, \quad \ldots$$

les degrés des dénominateurs des réduites; supposon

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-2} < q_n;$$

ψ sera justement de la forme (35) et le théorème précédent sera applicable. Si

$$(11) \quad q_{n+1} > (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} + \delta_1,$$

ce qui entraîne d'ailleurs l'inégalité précédente, ψ ne peut être solution de (1).

On a

$$q_1 < q_2 < \ldots,$$

$$Q_{n+1} = R_n Q_n + Q_{n-1},$$

et

$$q_{n+1} = q_n + r_n,$$

puisque $q_n > q_{n-1}$. Il suffira donc que, pour n assez grand,

$$(12) \quad q_n + r_n > (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} + \delta_1$$

pour que ψ ne soit pas solution d'une équation différentielle rationnelle d'ordre k.

---

[1] Nous aurions pu évidemment, au lieu de (35), considérer la forme plus générale de φ_1

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R'_1}{S_1} + \frac{R'_2}{S^2} + \ldots + \frac{R'_n}{S_n} + \ldots,$$

S_{n-1} ne divisant pas forcément S_n et les ordres de petitesse des fractions successives allant en augmentant. Ce qui précède indique suffisamment la marche à suivre.

Ce sera le cas, en particulier, quel que soit k, si l'on prend

$$r_n = n!(1+\eta) \qquad (0 \leqq \eta \leqq 1).$$

En effet, il suffira, d'après (42), qu'on ait

$$n! > (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)(\varpi + 1).$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l} q_n \;\; = q_{n-1} + r_{n-1}, \\ q_{n-1} = q_{n-2} + r_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_2 \;\; = q_1 \;\; + r_1, \end{array}\right.$$

d'où

$$\begin{aligned} q_n &= r_{n-1} + r_{n-2} + \ldots + r_1 + q_1, \\ &\leqq 2[(n-1)! + (n-2)! + \ldots + 1] + q_1, \\ &\leqq 2\,(n-1)! + 2\,\frac{n-2}{n-1}(n-1)! + q_1 \leqq 4(n-1)! \end{aligned}$$

pour n assez grand. Il suffira alors, *a fortiori*, qu'on ait

$$n! > 4\left[(n-1)! + \frac{(n-1)!}{n-1}(n-1)\right](\varpi + 1),$$

ou

$$n! > (n-1)!\,8(\varpi + 1),$$

ce qui a toujours lieu pour une valeur suffisamment grande de n.

Si l'on considère enfin le cas particulier où F, dans (1), est une fonction de x et de y seuls, on aura $k = 0$. On peut améliorer un peu la condition (41) en remarquant que le deuxième membre de (38) est, en réalité, d'ordre au plus égal à celui de $\frac{x^{-\delta}}{Q_n Q_{n+1}}$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{x^{q_n + q_{n+1} + \delta}}$. D'autre part, l'ordre de $\eta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ est $\geqq$ à celui de $\frac{1}{x^{q_n}}$, et celui du premier membre de (38) à celui de $\frac{1}{x^{q_n i_0 - \sigma}}$. (39) peut donc

être remplacé par

$$\frac{\lambda_1}{x^{q_n i_0}} \leq |F(x, y_n)| \leq \frac{\lambda'_1}{x^{q_n - q_{n+1} + \delta}}$$

(λ_1, λ'_1 constantes finies et > 0), d'où

$$q_n + q_{n+1} \leq q_n i_0 + \delta_1 \qquad (\delta_1 \text{ fini}),$$

$$q_{n+1} \leq (q_n - 1) i_0 + \delta_1.$$

Or

$$q_{n+1} = q_n + r_n,$$

et, par suite,

$$r_n \leq (q_n - 2) i_0 + \delta_1.$$

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant :

Corollaire. — La fraction continue illimitée

$$\psi = R_0 + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{R_2 + \ldots}},$$

où R_0, R_1, R_2, ... sont des polynomes en x à coefficients réels de degrés r_0, r_1, r_2, ... respectivement, les modules des racines réelles de ces polynomes étant limités et les coefficients des plus hautes puissances de x tous positifs, ne peut être une solution d'une équation différentielle rationnelle d'ordre k que si

$$q_n + r_n \leq (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)(\varpi + 1),$$

ϖ étant un entier positif qui ne dépend que de k et des exposants de y, y', ..., $y^{(k)}$ dans l'équation en question, et $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ les degrés des dénominateurs des réduites successives.

En particulier :

1° On ne peut avoir $r_n = n!(1 + \eta)$ $(0 \leq \eta \leq 1)$;

2° ψ ne peut être une fonction algébrique que si

$$r_n \leq i_0(q_n - 2) + \delta_1,$$

i_0 étant le degré de ψ, δ_1 une constante finie.

Ces résultats sont évidemment, jusqu'à un certain point, des extensions aux fonctions algébriques et aux équations différentielles des résultats indiqués par Liouville pour les solutions des équations algébriques à coefficients entiers.

On voit ainsi qu'il existe une infinité de fonctions, parmi lesquelles au moins les fonctions algébriques et celles définies par les équations différentielles rationnelles qui, développées dans un système de représentation de base quelconque aux environs du point x_0 (du point $x = \infty$), les racines des polynomes de base ayant leurs modules limités, ne peuvent être telles que le terme de rang $n+1$ soit, par rapport au terme précédent, d'un ordre de petitesse supérieur à une certaine limite fonction des degrés des dénominateurs des termes précédents. C'est là un fait aussi remarquable que la propriété correspondante pour les nombres représentés dans un système de numération de base quelconque [1].

VI.

Dans ce qui suit, nous chercherons à étendre les résultats précédents aux équations différentielles rationnelles par rapport à y et ses dérivées et de la forme (4) (§ II), quand les A sont non plus des polynomes, mais des fonctions de la forme

$$(43) \qquad A = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\eta_n\, a_{n,A}}{x^{\varpi_{n,A}}},$$

$a_{n,A}$ étant fini et $\neq 0$ au moins en général, η_n quelconque, mais $\neq 0$ et ne dépendant pas de A, et $\varpi_{n,A}$ une fonction croissante de n telle que $\varpi_{n,A} - \varpi_{n,A_1}$ soit toujours fini ainsi que $\varpi_{n,A} - \psi_n$.

Nous commencerons par étendre le théorème IV à ces équations différentielles en supposant que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n.

Nous suivrons à peu près la même marche qu'au § IV.

---

[1] *Voir* notre Note précitée.

Prenons dans le produit AH le terme en $\frac{1}{x}$ d'exposant E'_2 obtenu en formant le produit de $P+1$ termes ayant pour exposants respectifs, à une quantité finie près,

$$\psi_n, \psi_{n+1}, \ldots, \psi_{n+P-1}, \varpi_{n+P,A} = \psi_{n+P} + \rho$$

ρ étant fini.

Ce terme pourra être obtenu de la même manière qu'au § IV, mais en tenant compte du terme $\varpi_{\Delta,A}$ qui entre dans E'_2, et donnant successivement à $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ les valeurs $n, n+1, \ldots, n+P$ dans un ordre quelconque; on aura

$$(44) \qquad E'_2 = \psi_{n+P} + \psi_{n+P-1} + \ldots + \psi_n + \rho_1;$$

le coefficient correspondant sera

$$(45) \quad B'_2 = \Sigma i_0! \ldots i_k! (-1)^\lambda a_{j_P A} \tau_{j_P} \theta_{j_{P-1}} \ldots \theta_{j_0} \times \lambda_\sigma \psi_{n+P}^{\sigma_1} \ldots \psi_n^{\sigma_{P+1}}.$$

On a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{P+1} = N,$$

λ_σ est fini, positif et limité supérieurement et inférieurement; parmi les quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{P+1}$, il y en a i_k égales à k, i_{k-1} à $k-1, \ldots$, i_1 à 1, i_0+1 à 0, et cela de toutes les manières possibles, $j_P, j_{P-1}, \ldots, j_0$ ont, dans un certain ordre, les valeurs $n+P, n+P-1, \ldots, n$ et l'exposant σ de ψ_{j_p} est 0.

Supposons $P = P''$. Le terme correspondant de degré E'_2 donnera dans AH un terme qui ne pourra se réduire qu'avec ceux d'exposants de la forme (12). Ces exposants devront satisfaire à

$$(46) \quad \omega + \psi_{n+P} + \psi_{n+P''-1} + \ldots + \psi_n = m_1^\alpha \psi_\alpha + \ldots + m_k^k \psi_{\delta_k} + \varpi_{\Delta,A},$$

où ω est fini, et l'on en conclut que le second membre doit être tel, comme le premier, que $P = P''$ et qu'une et une seule des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ soit égale à une des quantités $n, n+1, \ldots, n+P$. Les termes en question sont ceux que nous avons considérés tout d'abord; leur nombre est limité.

Pour que (11) soit possible, il faudra donc : 1° ou bien que, pour deux des quantités B'_2, on ait $P = P''$, et que leur ordre de grandeur en n soit le même, c'est-à-dire, *a fortiori*, qu'il y en ait deux telles que

$$(47)\quad \left|\eta_{j_{P''}}\theta_{j_{P''-1}}\ldots\theta_{j_0}\psi_{n+P''}^{\sigma_1}\ldots\psi_n^{\sigma_{P''+1}}\right| = \left|\lambda\eta_{l_{P''}}\theta_{l_{P''-1}}\ldots\theta_{l_0}\psi_{n+P''}^{\sigma'_1}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P''+1}}\right|,$$

$|\lambda|$ étant fini et limité supérieurement et inférieurement; 2° ou bien que, dans un des coefficients B'_2 au moins, il y ait au moins deux termes d'ordre maximum égal [1], ce qui conduit à la même égalité. Dans le premier cas, les quantités correspondantes $i_k, i_{k-1}, \ldots, i_0$ ne sont pas toutes égales aux quantités $i'_k, i'_{k-1}, \ldots, i'_0$; on le voit comme au § IV. Ce premier cas exigera donc que

$$\left|\eta_{j_{P''}}\theta_{l_{P''}}\psi_{n+P''-\tau+1}^{\sigma_\tau}\ldots\psi_n^{\sigma_{P''+1}}\right| = \left|\lambda\eta_{l_{P''}}\theta_{j_{P''}}\psi_{n+P''-\tau+1}^{\sigma'_\tau}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P''+1}}\right|,$$

d'où, si par exemple $\sigma_\tau > \sigma'_\tau$,

$$(48)\qquad \psi_{n+P''-\tau+1} = \left|\lambda\left(\frac{\eta_{l_{P''}}}{\eta_{j_{P''}}}\frac{\theta_{j_{P''}}}{\theta_{l_{P''}}}\right)^{\frac{1}{\sigma_\tau}}\psi_{n+P''-\tau}^{\mu'_{\tau+1}}\ldots\psi_n^{\mu'_{P''-1}}\right|.$$

Dans le second cas, si les deux termes de B'_2 du même ordre sont tels que l'on n'ait pas à la fois $\sigma_1 = \sigma'_1, \ldots, \sigma_{P+1} = \sigma'_{P+1}$, on est encore conduit à (48). Mais, s'il en est différemment, il devra y avoir deux termes de B'_2 pour lesquels $a_{j_\lambda}\eta_{j_{P''}}\theta_{j_{P''-1}}\ldots\theta_{j_0}$ et $a_{j'_\lambda}\eta_{j'_{P''}}\theta_{j'_{P''-1}}\ldots\theta_{j'_0}$ soient comparables; pour le premier de ces termes, $\psi_{j_{P''}}$ a pour exposant 0, et pour le second, $\psi_{j'_{P''}}$ a pour exposant 0. Dans le cas où $i_0 = 0$, ces deux termes ne pourraient être tels que $\sigma_1 = \sigma'_1, \sigma_2 = \sigma'_2, \ldots$, et le deuxième cas est alors impossible; il en est autrement si l'un des termes pour lesquels $P = P''$ est tel que $i_0 \geq 1$. Alors, parmi les coefficients $\theta_{j_{P''-1}}, \ldots, \theta_{j_0}$, en nombre P'', il y en a $P'' - 1$ qui figurent dans le second membre de (45); on aura donc finalement, si $\theta_{j_{P''}}$ est celui

[1] Encore ce cas doit-il être exclu quand, dans les A, tous les termes à partir du $h^{\text{ième}}$ (h fini) sont de même signe.

qui n'y figure pas,

$$r_{i j_{p''}} \theta_{l_{p''}} = \lambda'' r_{i j'_{p}} \theta_{l'_{p''}},$$

avec

$$l_{p} = j''_{p''}, \qquad l'_{p''} = j_{p''}.$$

c'est-à-dire

$$(49) \qquad r_{i j_{p''}} \theta_{l_{p''}} = \lambda'' r_{i l_{p''}} \theta_{j_{p''}}.$$

Une des conditions (48) et (49) doit finalement avoir lieu.

Dès lors, il n'est pas difficile d'imaginer des cas très étendus où elles n'ont lieu ni l'une ni l'autre : en effet, comme au théorème V, supposons

$$(50) \qquad \psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{u_n};$$

(48) donne

$$\psi_{n+p''-\tau+1} = \lambda_1 H^{\frac{1}{\sigma_\tau}} \psi_{n+p''-\tau}^{u_\tau} \cdots \psi_n^{u_{p''-1}},$$

avec

$$H = \left| \frac{r_{i l_{p''}} \theta_{j_{p''}}}{\theta_{l_{p''}} r_{i j_{p''}}} \right|.$$

La première condition exige

$$\psi_{n+p''-\tau+1} < \lambda_1 H^{\frac{1}{\sigma_\tau}} \psi_{n+p''-\tau}^{\nu} \qquad (\nu \text{ fini} > 0),$$

$$H > \frac{1}{\lambda_2} \psi_{n+p''-\tau}^{(u_{n+p''-\tau}-\nu)\sigma_\tau}.$$

Elle exige aussi

$$\psi_{n+p''-\tau+1} > \lambda'_1 H^{\frac{1}{\sigma_\tau}} \psi_n^{\nu'} \qquad (\nu' \text{ fini} > 0),$$

$$H < \frac{\psi_{n+p''-\tau+1}^{\sigma_\tau}}{\lambda'_1 \psi_n^{\nu'\sigma_\tau}},$$

ce qui donne finalement

$$(51) \qquad \frac{\psi_{n+p''-\tau+1}^{\sigma_\tau}}{\lambda'_1 \psi_n^{\nu'\sigma_\tau}} > H > \frac{1}{\lambda_2} \psi_{n+p''-\tau}^{(u_{n+p''-\tau}-\nu)\sigma_\tau},$$

les deux membres extrêmes croissant indéfiniment avec n.

Il suffira que H soit $>$ le premier membre ou $<$ que le dernier, sans que (49) ait lieu, pour qu'il y ait impossibilité. Un cas simple est celui où $\frac{\eta_{l_{p''}}}{\eta_{l_{p'}}}$ reste limité; il suffira que le rapport $\frac{\theta_{j_{p''}}}{\theta_{l_{p''}}}$ ne reste pas limité quand n croît indéfiniment pour que (49) n'ait pas lieu. Supposons, par exemple, que $\left|\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right|$ tende vers zéro en décroissant quand n croît indéfiniment; on a

$$\left|\frac{\theta_{j_{p''}}}{\theta_{l_{p''}}}\right| \leqq \left|\frac{\theta_n}{\theta_{n+p''}}\right|.$$

(51) donne

$$\psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu)^{\sigma_\tau}} < \left|A\frac{\theta_n}{\theta_{n+p''}}\right| < \psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu_1)^{\sigma_\tau}} \qquad (A, \nu_1 \text{ finis}).$$

Il faudra, *a fortiori*,

$$\left|A\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}\right| < \psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu_1)^{\sigma_\tau}} < \psi_n^{(2\mu_{n+p''-\tau})^\rho} \qquad (\rho \text{ fini}),$$

ce qui exigera

$$|\theta_{n+1}| > \frac{A\,|\theta_n|}{\psi_n^{(2\mu_{n+p''-\tau})^\rho}}.$$

On sera donc sûr d'un cas d'impossibilité quand

$$|\theta_{n+1}| < \frac{A\,|\theta_n|}{\psi_n^{(\mu_{n+\nu_n})^{\rho_n}}}$$

(μ_n, ν_n et ρ_n fonctions croissantes de n).

Il faudra encore

$$\left|\frac{\theta_{n+p''-1}}{\theta_{n+p''}}\right|^{1''} > \left|\frac{\theta_n}{\theta_{n+p''}}\right| > \frac{1}{A}\psi_{n+p''-\tau}^{\mu_n^{''}},$$

$$\left|\frac{\theta_{n+p''-1}}{\theta_{n+p''}}\right| > \frac{1}{\lambda_3}\psi_{n+p''-\tau}^{\frac{\mu_n^{''}}{p''}},$$

$$|\theta_{n+p''}| < \lambda_3\,|\theta_{n+p''-1}|\,\psi_{n+p''-\tau}^{-\frac{\mu_n^{''}}{p''}} < |\theta_{n+p''-1}|\,\psi_n^{\frac{\mu_n}{\omega_1}} \qquad (\omega_1 \text{ const.}).$$

On sera encore sûr d'un cas d'impossibilité si

$$|\theta_{n+P^{\circ}}| > \frac{|\theta_{n+P-1}|}{\psi_n^M} \qquad (M \text{ fini} > 0).$$

Nous résumerons les résultats les plus nets de la discussion précédente dans l'énoncé suivant :

Théorème VI. — *Soit la série illimitée*

$$\zeta = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots$$

où, pour n assez grand, $\left|\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right|$ *décroît en tendant vers* 0 *quand n croît indéfiniment et où* $\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$ (μ_n *étant une fonction croissante de n qui croît indéfiniment avec n, et* λ *une quantité finie* > 0 *et limitée supérieurement et inférieurement, qui peut varier avec n*).

Soit encore l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A y^{i_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k},$$

d'ordre k, où les A sont des séries de la forme $\sum_1^{\infty}{}_n \frac{\tau_{in} a_{nA}}{x^{\varpi_{nA}}}$ ($|a_{nA}|$ *fini et* $\neq 0$, *au moins en général; τ_{in} quelconque,* $\neq 0$, *ne dépendant pas de A et tel que* $\lim \left|\frac{\tau_{in-1}}{\tau_{in}}\right|$ *soit fini; et* ϖ_{nA} *une fonction croissante de n telle que* $\varpi_{nA} - \varpi_{nA_1}$ *soit toujours fini ainsi que* $\varpi_{nA} - \psi_n$).

ζ *ne peut être solution de* $F = 0$:

1° *Quand*

$$A|\theta_n| > \theta_{n+1} \psi_n^{\mu_{n+\nu}\xi_n}$$

(A *fini*, μ_n, ν_n, ξ_n *croissant indéfiniment avec n*);

2° *Quand*

$$|\theta_{n+P^{\circ}}| > \frac{|\theta_{n+P-1}|}{\psi_n^M} \qquad (M \text{ fini} > 0),$$

où P *est le maximum de* $i_0 + i_1 + \ldots + i_k$.

VII.

On peut encore étendre aux équations différentielles de la forme indiquée au § VI les théorèmes I et III (§ II et III).

Nous n'entrerons pas dans le détail en ce qui concerne le théorème semblable au théorème I; la démonstration est presque la même; on obtient ainsi :

THÉORÈME VII. — *Tout étant posé comme au théorème précédent (les conditions* $\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$ *et* $\lim \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n}$ *finies étant laissées de côté), les conclusions du théorème* I *subsistent pourvu toutefois que*

$$|\theta_n| < \lambda |\eta_n \psi_n| \qquad (\lambda \text{ fini} > 0)$$

dans les cas IV *et* V. *On a des résultats presque analogues quand*

$$\varpi_{n,\lambda} = \psi_n(1 + \eta)\,(\lim \eta = 0 \text{ pour } n = \infty).$$

Nous croyons utile néanmoins de donner la démonstration du théorème analogue au théorème III.

Opérons comme au § III. Soit $\psi_{n+1} - \psi_n \geqq 1$, et $\varpi_{n,\lambda} - \psi_n$ fini et $\leqq R$ en valeur absolue, R étant fini et limité.

Cherchons les termes du deuxième membre de (4) pour lesquels (12) (§ I) a lieu en supposant immédiatement $P' = P''$, c'est-à-dire tels que

$$(15\,bis) \qquad P''\psi_n + \varpi_{n,\lambda} = m_1^0 \psi_\alpha + \ldots + m_k^k \psi_{\delta_k} + \varpi_{\Delta,\lambda} + \omega.$$

On en déduit encore

$$(16\,bis) \qquad P''\psi_n + \varpi_{n,\lambda} \geqq \psi_\beta + \omega \qquad \text{et} \qquad \geqq \varpi_{\Delta,\lambda} + \omega;$$

par suite

$$(P'' + 1)\psi_n = \psi_\beta + \omega' \qquad \text{et} \qquad \varpi_{\Delta,\lambda} = \omega',$$

$$(17\ bis) \qquad \beta = \chi_n, \qquad \Delta = \chi_n,$$

χ_n étant une fonction croissante de n.

Pour toute valeur de $P'' = m_1^0 + \ldots + m_\mu^k$, on a comme limite supérieure du nombre des solutions de (15 *bis*) $\chi_n^{1+P''}$. On a encore au plus $\sigma\chi_n^{1-P''}$ termes B correspondants, σ étant fini.

Par hypothèse

$$m_1^0 + \ldots + m_\mu^k \leqq P''.$$

Si toutes les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ sont $\leqq n$, (15 *bis*) est impossible à moins que

$$(19\ bis) \qquad m_1^0 + \ldots + m_\mu^k = P''.$$

Les coefficients B de (11) se divisent en deux catégories : ceux pour lesquels (19 *bis*) a lieu, et $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ sont $\leqq n$; ceux pour lesquels une au moins des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ est $> n$.

Considérons la première catégorie de termes : s'il n'y a qu'un terme de (1) pour lequel $P = P''$, les termes de la première catégorie se réduisent à un pour n assez grand (cas où F est un polynome entier en y, où F ne contient qu'une seule des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$, où F satisfait aux conditions du cas IV du théorème III. On peut prendre alors $\psi_n = n + \nu$, $\varpi_{n,\lambda} = n + \nu_\lambda$, $\chi_n = (1 + P'')n + \rho_1$ (ρ_1 fini).

Plus généralement, même si l'on a deux termes, tels que $P = P''$, une des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ ne pourrait être $< n$ dès que $\psi_n - \psi_{n-1}$ surpasse une quantité finie fonction de N, R et des $i_0, \ldots, i_k$. Quand ceci a lieu, supposons les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ égales à n. On a

$$m_1^0 + \ldots + m_\mu^k = P'';$$

les termes B correspondants sont de l'ordre de grandeur de $\tau_{1n}\theta_n^{P''}\psi_n^N$; leur nombre est limité. Si, parmi eux, on n'en a qu'un pour lequel $N = N''$, la somme des modules des autres est d'ordre inférieur à celui de $\tau_{1n}\theta_n^{P''}\psi_n^{N''}$.

Dans tous ces cas, même si la première catégorie comprend plus d'un terme, l'ensemble de ses termes donne dans au moins une relation analogue à (11) une somme dont le module est de l'ordre de

$$\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N''}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi.

Considérons l'ensemble des termes B de la deuxième catégorie : il faudra que la somme des modules de ces termes, chacun multiplié par un facteur constant positif et limité, soit au moins de l'ordre de grandeur de $\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N''}$, c'est-à-dire *a fortiori* que

$$(21\ bis) \qquad |\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N''}| \leqq \lambda_2 \Sigma |\eta_\Delta \theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\delta_k}^{m_1^k} \psi_\alpha^{m_1^1} \ldots \psi_{\delta_k}^{k m_k^k}|,$$

la somme Σ s'étendant à tous les termes B de la deuxième catégorie.

Nous décomposerons ces termes en trois sous-catégories :

1° Ceux pour lesquels $\Delta > n$ et une des quantités α est $> n$: leur nombre est $\leqq \sigma_1 \chi_n^{P''+1}$; chaque terme a son module

$$\leqq \tau_1 |\eta_{n+1} \theta_{n+1}| |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1},$$

N_1 étant le maximum des quantités N;

2° Ceux pour lesquels $\Delta > n$ sans que ceci ait lieu : leur nombre est $\leqq \sigma_2 n^{P''} \chi_n$; chaque terme a son module

$$\leqq \tau_2 |\eta_{n+1}| |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1};$$

3° Ceux pour lesquels $\Delta < n$; leur nombre est $\leqq \sigma_3 n \chi_n^{P''}$; chaque terme a son module $\leqq \tau_3 |\theta_{n+1}| |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1}$. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ sont finis.

(21 *bis*) donne alors

$$|\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N''}| \leqq \sigma_4 |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1} \{|\eta_{n+1} \theta_{n+1} \chi_n^{1+P''}| + |\eta_{n+1} n^{P''} \chi_n| + |\theta_{n+1} n \chi_n^{P''}|\}.$$

Sans discuter en détail cette inégalité, on en conclut de suite

$$|\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N''}| \leqq |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1} \{|\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| + |\eta_{n+1} \theta_{n+1}|\} \sigma_4 \chi_n^{1+P''}.$$

car $\chi_n > n$, ou encore

$$|\eta_n \theta_n^{\nu} \psi_n^{N}| < 2\sigma_1 \chi_n^{1+P} : \eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| (1 + P^{\nu}) \psi_n + \nu_1^{N_1}.$$

On sera donc conduit à une impossibilité quand

$$(23\ bis) \qquad |\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| < \frac{\eta_n \theta_n^{\nu}}{\sigma_5 \chi_n^{1+P^{\nu}} \psi_n},$$

ν étant $\geq N_1$.

Dans le cas où F est un polynome entier par rapport à l'une des quantités $y, y', \ldots, y^k$ et ne contient pas les autres, ou aussi quand F remplit les conditions du cas IV du théorème III, on peut encore prendre $\psi_n = n + \nu_1'$. On en conclut, en particulier, que (23 *bis*) a lieu quand $\eta_n \zeta^n$ et $\theta_n \zeta^{n'}$ sont de la forme $1 + \eta_1$ ($\lim_{n=\infty} \eta_1 = 0$), car

$$2\zeta^{-n+1} < \frac{\zeta^{-n'+1+P}}{n^{\mu}} \quad (\mu \text{ limité}, \zeta > 1).$$

Dans tous les cas considérés à la page 54, supposons que $\psi_n = n^m$; (23 *bis*) a encore lieu quand $\eta_n \zeta^{n'}$ et $\theta_n \zeta^{n'}$ sont de la forme $1 + \eta_1$.

Enfin on conclut de ce qui précède une condition analogue à la condition C′ du § III, et ce théorème :

Théorème VIII. — *Soit la série illimitée*

$$\eta = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où ψ_n est une fonction croissante de n qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, $\psi_{n+1} - \psi_n$ croissant indéfiniment avec n.

Soit encore

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A y^{\alpha_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{\alpha_k},$$

une équation différentielle rationnelle en y et ses dérivées, les $A(x)$ étant des fonctions de la forme $\sum \frac{\eta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}}{x^{\Theta_{\alpha\beta}}}$, qui ne peuvent différer

que par les valeurs des a_{nA} *et des* ϖ_{nA}, *les* η_n *étant quelconques, mais* $\neq 0$ *et ne dépendant pas de* A, *les* a_{nA} *limités supérieurement et inférieurement et* $\neq 0$ *en général, et* ϖ_{nA} *une fonction croissante de* n *telle que* $\varpi_{nA} - \psi_n \leq R$, R *étant limité quel que soit* A.

Si ξ_n *est une certaine fonction croissante de* n *qui dépend de* ψ_n, *et si l'on a*

$$(25\ bis) \qquad |\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| < \frac{\eta_n \theta_n^{\nu}}{\xi_n^{\nu}},$$

quelle que soit la constante ν, ζ *ne peut être solution de* $F = 0$:

I. — *Quand* F *est algébrique par rapport à une des quantités* $y, y', \ldots, y^h$ *et ne contient pas les autres, ou est du premier ordre;*

II. — *Quand* F *est linéaire par rapport aux dérivées de* y;

III. — *Dans les cas indiqués aux cas IV et V du théorème III.*

Si $\eta_n = \zeta^{-n}(1 + \eta)$, $\theta_n = \zeta^{-n}(1 + \eta')$ $(\zeta > 1, \lim \eta = 0, \lim \eta' = 0$ *pour* $n = \infty)$, *et* $\psi_n = n^m (m > 1)$, *la condition* (25 *bis*) *a toujours lieu.*

Les propriétés I et IV du théorème III restent vraies quand $\psi_{n+1} - \psi_n$ *est fini et* ≥ 1. *Elles sont applicables à* ζ *quand* η_n *et* θ_n *ont les valeurs ci-dessus* [1].

---

[1] La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance du Cours d'Analyse de l'École Polytechnique et des Éléments de la Théorie des fractions continues algébriques.

On pourra rapprocher les résultats de notre Mémoire d'une question posée par M. Autonne dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1894, p. 90, et 1899, p. 25.

Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$;

PAR M. S. ZAREMBA.

I. — Introduction.

1. On sait le rôle considérable que jouent, à divers points de vue, les problèmes qui consistent à déterminer, pour un domaine donné, l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + \xi u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi u = 0,$$

où ξ est une constante, définie par les valeurs périphériques de l'intégrale elle-même ou par celles de la dérivée suivant la normale à la surface limitant le domaine proposé. Ces problèmes sont des cas particuliers de problèmes que nous allons énoncer dans un instant, après avoir rappelé certains faits bien connus et défini des notations que nous conserverons dans toute l'étendue de ce Travail.

Nous aurons à considérer constamment une surface fermée (S) au sujet de laquelle nous ferons les hypothèses suivantes : elle admettra en chacun de ses points un plan tangent déterminé; l'angle aigu formé par deux normales sera inférieur au produit d'une constante par la distance des pieds de ces normales; si l'on désigne par (S′) la portion de la surface située à l'intérieur d'une sphère de rayon fixe, mais assez petit, dont le centre soit un point quelconque O de la surface, la portion (S′) de la surface (S) aura au plus un seul point d'intersection avec chaque parallèle à la normale en O.

Nous désignerons par (D) le domaine intérieur à la surface (S) et par (D′) le domaine extérieur.

On remarquera que nos hypothèses ne limitent pas le nombre de nappes faisant partie de la surface (S) et qu'elles n'impliquent nullement que les domaines (D) et (D′) soient forcément connexes, ni même que l'un d'eux offre cette particularité.

Considérons maintenant une fonction quelconque $F(x, y, z)$ des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point variable M. Cette fonction pourra tendre vers une limite déterminée lorsque le point M tend vers un point situé sur la surface (S) sans sortir de l'un des domaines (D) ou (D′). Nous désignerons cette limite par $(F)_i$ dans le premier cas et par $(F)_e$ dans le second. Les fonctions $(F)_i$ et $(F)_e$, calculées pour un même point (x_0, y_0, z_0) de la surface (S), pourront non seulement différer entre elles, mais, en outre, chacune d'elles pourra avoir une valeur différente de l'expression $F(x_0, y_0, z_0)$, expression que nous désignerons par $(F)_s$.

Supposons maintenant que le point (x, y, z) soit situé sur la normale élevée en un point A à la surface (S) et envisageons l'expression

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z},$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale regardée comme un axe dirigé vers l'intérieur de la surface (S). Il pourra arriver que l'expression précédente tende vers une limite déterminée lorsque le point (x, y, z) tend vers le point A, sans sortir de l'un des domaines (D) ou (D′). Nous représenterons cette limite par $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$ dans le premier cas et par $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e$ dans le second; dans le cas où l'on aurait, sur toute la surface (S),

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_e = \left(\frac{dF}{dN}\right)_i,$$

nous représenterons la valeur commune de ces expressions par $\frac{dF}{dN}$.

Soit μ celle des déterminations de l'expression $\sqrt{\xi}$ dont la partie réelle est positive, et soit r la distance de deux points quelconques

(x, y, z) et (x', y', z'). On sait que l'expression

$$\frac{e^{-\mu r}}{r},$$

où e est la base des logarithmes népériens, est une intégrale particulière de l'équation (1). Cette intégrale présente les plus grandes analogies avec l'intégrale particulière $\frac{1}{r}$ de l'équation de Laplace. Désignons par σ et ϖ des fonctions continues définies sur la surface (S), regardons les variables x', y', z' comme les coordonnées d'un élément ds de la surface (S) et considérons les fonctions

$$u = \int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds \tag{2}$$

et

$$v = \int_{(S)} \varpi \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos\psi ds, \tag{3}$$

où ψ représente l'angle formé par la normale intérieure à l'élément ds avec le rayon allant du point (x, y, z) à l'élément ds. A cause de l'analogie évidente des fonctions u et v avec les potentiels newtoniens de simple couche et de double couche, nous appellerons les fonctions u et v, dont évidemment chacune est une intégrale de l'équation (1), *potentiel généralisé d'une simple couche de densité* σ et *potentiel généralisé* [1] *d'une double couche de densité* ϖ, ayant pour nombre caractéristique le nombre μ.

Cela posé, soient φ une fonction continue définie sur la surface (S) et λ un paramètre donné.

Les problèmes auxquels il a été fait allusion plus haut consistent en ceci : déterminer un potentiel généralisé de simple couche u et un po-

---

[1] Dès 1896, M. C. Neumann a fait usage de ces potentiels généralisés pour étendre, dans le cas de surfaces *convexes*, sa méthode de la moyenne arithmétique aux équations de la forme $\Delta\psi - \alpha^2\psi = 0$ (*Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip de Fernwirkungen*, p. 252). On trouvera aussi de nombreuses applications des potentiels généralisés dans mon Mémoire *Sur l'équation* $\Delta u + \xi u + f = 0$ *et sur les fonctions harmoniques* (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1899).

tentiel généralisé de double couche v vérifiant les équations

$$(4) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right\} + 2\varphi.$$

$$(5) \qquad (v)_i - (v)_e = \lambda\{(v)_i + (v)_e\} + 2\varphi.$$

En attribuant au paramètre λ une des valeurs $+1$ ou -1, on réduit les problèmes précédents aux problèmes classiques énoncés au début.

Nous nous proposons d'étudier les fonctions u et v comme fonctions du paramètre λ, en nous restreignant au cas où le nombre ξ est réel et non positif. Les principaux résultats que nous obtenons peuvent être résumés ainsi :

1° On peut satisfaire aux équations (4) et (5) par des valeurs de u et v, fonctions analytiques du paramètre λ, et chacune de ces fonctions analytiques est parfaitement déterminée. En dehors de ces solutions, les équations (4) et (5) peuvent admettre des solutions qui ne sont pas des fonctions analytiques de λ. Ces solutions non analytiques ne se distinguent des solutions analytiques que pour certaines valeurs isolées du paramètre λ. Dans l'énoncé des autres résultats, nous supposerons que l'on a pris pour u et v les valeurs qui sont des fonctions analytiques de λ.

2° Les fonctions u et v de λ sont des fonctions uniformes admettant au plus un seul point singulier essentiel. Ce point singulier, quand il existe, est toujours à l'infini. Les points singuliers non essentiels des fonctions u et v sont des pôles simples faisant tous partie d'une même suite de nombres réels et distincts

$$(6) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

vérifiant les inégalités

$$(7) \qquad |\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|;$$

la suite (6) est indépendante de la fonction φ; elle est parfaitement déterminée par le paramètre ξ et par la surface (S). J'ajoute que l'on a

$$|\lambda_1| > 1,$$

lorsque $\xi < 0$; mais lorsque $\xi = 0$, on a, à la fois,

$$\lambda_1 = +1 \qquad \text{et} \qquad |\lambda_2| > 1.$$

3° A chaque nombre λ_k de la suite (6) correspond un nombre fini de potentiels généralisés de simple couche, linéairement indépendants,

$$(8) \qquad U_k^{(1)}, \quad U_k^{(2)}, \quad \ldots, \quad U_k^{(j_k)},$$

vérifiant les équations

$$(9) \quad \left(\frac{dU_k^t}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_k^t}{dN}\right)_i = \lambda_k \left\{\left(\frac{dU_k^t}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_k^{(t)}}{dN}\right)_i\right\} \qquad (t = 1, 2, \ldots, j_k.)$$

4° Le résidu U_k, relatif au pôle λ_k de la fonction u, est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (8). La fonction U_k sera donc un potentiel généralisé de simple couche, vérifiant l'équation

$$\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = \lambda_k \left\{\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i\right\}.$$

5° Le résidu V_k, relatif au pôle λ_k de la fonction v, sera un potentiel généralisé de double couche vérifiant l'équation :

$$(V_k)_i - (V_k)_e = \lambda_k \{(V_k)_i + (V_k)_e\},$$

et il existera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (8), soit Φ_k, telle que l'on ait, à l'intérieur de la surface (S),

$$V_k = \Phi_k,$$

et à l'extérieur

$$V_k = \frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k} \Phi_k.$$

Les résultats précédents sont une généralisation de ceux que j'ai

brièvement indiqués ailleurs [1] et conduisent, comme on le verra, à une démonstration générale de la légitimité des méthodes de Neumann et de Robin, méthodes si importantes dans la théorie de l'équation de Laplace.

Pour éviter tout malentendu, je précise le sens de certaines expressions dont nous aurons constamment à nous servir.

Lorsque nous dirons qu'une fonction w vérifie l'équation

$$\Delta w + \xi w = 0$$

dans un certain domaine (Ω), nous entendrons par là qu'en chaque point appartenant au domaine (Ω), mais non situé sur la frontière de ce domaine, les dérivées secondes $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ ont des valeurs finies vérifiant l'équation $\Delta w + \xi w = 0$.

Il s'ensuit que la fonction w et ses dérivées premières seront continues en chaque point du domaine (T) non situé sur la frontière.

Nous aurons à considérer des séries de la forme

$$F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \ldots,$$

où les F_k seront des fonctions de deux ou de trois variables, définies dans un certain domaine (T). J'appellerai *rayon de convergence* d'une telle série le plus grand nombre positif R tel que, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité $|\lambda| < R$, la série soit uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (T), y compris la frontière de ce domaine, s'il est limité.

II. — Problème fondamental relatif aux potentiels généralisés de simple couche. Méthode de Robin.

2. Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : Étant donnée une fonction continue réelle [2] φ, définie sur la surface

---

[1] *Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin.* Note présentée à l'Académie de Cracovie le 4 mars 1901.

[2] Le cas où la fonction φ serait une fonction complexe se ramène immédiatement à celui où elle est réelle.

fermée (S) et un paramètre λ, déterminer un potentiel généralisé de simple couche u, ayant pour nombre caractéristique un nombre donné μ, réel et non négatif, de façon que ce potentiel généralisé vérifie l'équation :

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right\} + 2\zeta.$$

La fonction u vérifiera, en tout point de l'espace non situé sur la surface (s), l'équation

$$(2) \qquad \Delta u - \mu^2 u = 0.$$

Cela posé, voyons si le problème précédent n'admet qu'une seule solution. Supposons, à cet effet, qu'il en admette deux. La différence Φ des valeurs correspondantes de la fonction u serait un potentiel généralisé de simple couche vérifiant l'équation

$$(3) \qquad \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e + \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i\right]$$

à la surface (S) et l'équation

$$\Delta\Phi - \mu^2\Phi = 0$$

en chaque point de l'espace non situé sur la surface.

Posons, pour mettre en évidence les parties réelle et imaginaire du paramètre λ et celles de la fonction Φ,

$$\lambda = \alpha + \beta i, \qquad \Phi = P + Qi,$$

nous aurons

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta P - \mu^2 P = 0, \qquad \Delta Q - \mu^2 Q = 0, \\ &\left(\frac{dP}{dN}\right)_e - \left(\frac{dP}{dN}\right)_i = \alpha\left[\left(\frac{dP}{dN}\right)_e + \left(\frac{dP}{dN}\right)_i\right] - \beta\left[\left(\frac{dQ}{dN}\right)_e + \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i\right], \\ &\left(\frac{dQ}{dN}\right)_e - \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i = \alpha\left[\left(\frac{dQ}{dN}\right)_e + \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i\right] + \beta\left[\left(\frac{dP}{dN}\right)_e + \left(\frac{dP}{dN}\right)_i\right]. \end{aligned}\right.$$

Envisageons maintenant les intégrales

$$A = \int\int\int_{D} \left[\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 P^2 \right] dx\,dy\,dz,$$

$$B = \int\int\int_{D} \left[\sum \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 Q^2 \right] dx\,dy\,dz,$$

$$C = \int\int\int_{D} \left(\sum \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu^2 PQ \right) dx\,dy\,dz$$

étendues à tout le domaine (D) limité par la surface (S) et les intégrales analogues A', B', C' relatives au domaine extérieur (D'). En s'appuyant sur le théorème de Green, on déduira aisément des équations (4) les relations suivantes :

$$A' + A = \alpha(A' - A) - \beta(C' - C),$$
$$B' + B = \alpha(B' - B) + \beta(C' - C),$$
$$C' + C = \alpha(C' - C) - \beta(B' - B),$$
$$C' + C = \alpha(C' - C) + \beta(A' - A),$$

d'où

$$A' + B' + A + B = \alpha(A' + B' - A - B),$$
$$0 = \beta(A' + B' - A - B).$$

La première de ces équations nous donne

$$|\alpha| \geq 1,$$
$$A' + B' - A - B \neq 0;$$

on aura donc, à cause de la seconde,

$$\beta = 0.$$

Il est donc prouvé que l'équation (1) ne peut admettre plus d'une seule solution que pour des valeurs de λ réelles et non inférieures en valeur absolue à l'unité. On s'assurera d'ailleurs aisément que, pour $\lambda = -1$, l'équation (1) ne peut admettre qu'une seule solution,

et enfin que, pour $\lambda = +1$, elle peut en admettre plus d'une, mais seulement dans le cas où l'on aurait $\mu = 0$.

3. Cherchons à développer la fonction u suivant les puissances de λ et posons à cet effet

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k. \tag{5}$$

Chacune des fonctions u_k sera un potentiel généralisé de simple couche et l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 2\eta, \\ &\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i \qquad (k = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} &u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \eta \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \\ &u_k = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \left[\left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i\right] \frac{e^{-\mu r}}{r} ds. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Désignons par r' la distance de deux points A et B situés sur la surface (S); soit γ l'angle formé par l'axe BA avec la normale intérieure élevée en A à la surface (S), et soit enfin ds l'élément de la surface relatif au point B. On trouvera, en posant

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_0 = \eta, \\ &2\sigma_k = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

l'expression suivante pour la valeur en A de la fonction σ_k

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma_{k-1} \frac{d}{dr'} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \cos\gamma\, ds \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Supposons pour un moment que la série

$$(10) \qquad 2\pi\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k$$

soit uniformément convergente sur la surface (S) pourvu que λ ait une valeur vérifiant l'inégalité

$$(11) \qquad |\lambda| < R,$$

où R est une certaine constante positive.

On reconnaîtra aisément que, lorsque cette condition est vérifiée, les circonstances suivantes auront lieu à la fois :

1° La série (5) sera uniformément convergente dans tout l'espace.

2° La somme u de cette série pourra être représentée par la formule

$$(12) \qquad u = \int_S \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

3° La somme u de la série (5) satisfera à l'équation (1). Pour s'assurer de ce dernier point, il n'y a qu'à remarquer que les formules (6) et (8) nous donnent

$$(13) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{du_k}{dN}\right)_e = \sigma_{k+1} + \sigma_k, \\ \left(\dfrac{du_k}{dN}\right)_i = \sigma_{k+1} - \sigma_k, \end{cases}$$

d'où il résulte que les séries

$$(14) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e \lambda^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \lambda^k$$

seront l'une et l'autre uniformément convergentes. Or, de là, on déduit de suite que l'équation (1) sera bien vérifiée.

4. Un des résultats obtenus au numéro précédent peut être énoncé brièvement ainsi : le rayon de convergence de la série (5) est au moins égal au rayon de convergence de la série (10). Démontrons que les rayons de convergence de ces séries sont égaux. Pour cela, il suffira de prouver que le rayon de convergence de la série (10) ne peut être inférieur à celui de la série (5). Considérons, à cet effet, un nombre positif m, plus grand que μ, dont nous disposerons dans un instant, et posons

$$(15) \qquad w_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma_k \frac{e^{-mr}}{r}\, ds.$$

Nous aurons, sur la surface (S),

$$(16) \qquad \left(\frac{dw_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{dw_k}{dN}\right)_i = 2\sigma_k,$$

et, en tout point de l'espace non situé sur la surface,

$$\Delta w_k - m^2 w_k = 0.$$

Posons

$$(17) \qquad f_k = w_k - u_k.$$

La fonction f_k jouira des propriétés suivantes :

1° Elle satisfera à l'équation

$$(18) \qquad \Delta f_k - m^2 f_k - (m^2 - \mu^2) u_k = 0,$$

en tout point de l'espace non situé sur la surface (S).

2° On aura

$$(19) \qquad \left(\frac{df_k}{dN}\right)_e = \left(\frac{df_k}{dN}\right)_i = \frac{df_k}{dN};$$

cela résulte de l'équation (16) et de l'équation

$$\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = 2\sigma_k.$$

3° La fonction f_k sera continue, même à la traversée de la surface (S). En effet, il en est ainsi de chacune des fonctions u_k et w_k.

4° Désignons par d la distance d'un point M de l'espace à l'origine des coordonnées et faisons croître la longueur d indéfiniment.

Il est évident que les produits

$$f_k d, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x} d^2, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y} d^2, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial z} d^2,$$

resteront finis (en général, ils tendront vers zéro).

Voici ce que l'on peut en conclure, au moyen d'une application convenable du théorème de Green. Si l'on désigne par r la distance du point x, y, z au point x', y', z', on aura

$$(20) \qquad f_k = \frac{\mu^2 - m^2}{4\pi} \int\int\int u_k \frac{e^{-mr}}{r} dx' dy' dz',$$

où l'intégration doit être étendue à tout l'espace.

D'ailleurs, en vertu des formules (15), (17) et (19)

$$(21) \quad 2\rho_{k+1} = \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = -2\frac{df_k}{dN} + \frac{1}{\pi}\int_S \sigma_k \frac{d}{dr'}\frac{e^{-mr'}}{r'}\cos\gamma ds,$$

où γ et r' ont la même signification que dans les formules (9).

Désignons par δ_k et δ'_k les maxima des modules des fonctions u_k et σ_k. Nous trouverons, en nous appuyant sur la formule (20),

$$(22) \qquad \left|\frac{df_k}{dN}\right| < 2\frac{m^2 - \mu^2}{m}\delta_k < 2m\delta_k.$$

Observons maintenant qu'il est possible de trouver un nombre positif A, dépendant uniquement de la surface (S), tel que l'on ait

$$(23) \qquad \left|\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_k \frac{d}{dr'}\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cos\gamma ds\right| < \frac{A}{m}\delta'_k.$$

L'équation (21) et les inégalités (22) et (23) nous donnent

$$(24) \qquad \delta_{k+1} < 2m\delta_k + \frac{A}{m}\delta'_k.$$

Soit l le rayon de convergence de la série (5) ou, ce qui est la même chose, celui de la série

$$(25) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \lambda^k.$$

Nous choisirons le nombre m de façon que l'on ait

$$\frac{\Lambda}{m} \leq \frac{1}{2l};$$

l'inégalité (24) nous donnera alors

$$(26) \qquad \delta'_{k+1} < \frac{1}{2l} \delta'_k + 2m \delta_k.$$

Désignons par t un nombre positif tel que

$$(27) \qquad t < l,$$

mais d'ailleurs quelconque; l'inégalité (26) nous donnera

$$\sum_{k=0}^{i} \delta'_{k+1} t^{k+1} < \frac{t}{2l} \sum_{k=0}^{i} \delta'_k t^k + 2mt \sum_{k=0}^{i} \delta_k t^k;$$

on en déduira aisément, en tenant compte de l'inégalité (27), que l'inégalité suivante aura lieu quel que soit i :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i} \delta'_k t^k < \delta'_0 + 2mt \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k t^k;$$

donc la série à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta'_k t^k$$

est convergente, et par conséquent la série (10) sera convergente

pourvu que l'on ait

$$|\lambda| = t.$$

Or le nombre positif t est uniquement assujetti à satisfaire à l'inégalité (27); il en résulte que la série (10) sera uniformément convergente sur la surface (S) pourvu que λ ait une valeur vérifiant la condition

$$|\lambda| < t.$$

Cela prouve que le rayon de convergence de la série (10) ne peut être plus petit que celui de la série (5). C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

On peut en conclure, conformément à ce qui a été dit au début de ce numéro, que les rayons de convergence des séries (5) et (10) sont égaux.

5. D'après les conventions faites dans l'*Introduction*, le symbole $(u_k)_s$ représente la fonction à laquelle se réduit la fonction u_k sur la surface (S).

Cela étant, posons

$$I_{2k} = \int_S (u_k)_s^2 \, ds \tag{28}$$

et démontrons que le rayon de convergence de la série (5) coïncide avec celui de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{I_{2k}}\, \lambda^k. \tag{29}$$

Reportons-nous, pour cela, aux formules (7); désignons par r' la distance d'un élément ds de la surface (S) à un point quelconque A situé sur la surface, et soit ψ l'angle formé par la normale à ds dirigée vers l'intérieur de la surface avec l'axe dirigé du point A à l'élément ds. Une application facile du théorème de Green nous donnera

$$(u_k)_s = \frac{1}{2\pi} \int_S (u_{k-1})_s \frac{d}{dr} \frac{e^{\mu r}}{r'} \cos\psi \, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

Cela posé, observons que, d'après un théorème bien connu, une fonction F qui vérifie dans un certain domaine l'équation

$$\Delta F + \xi F = 0,$$

où ξ est un nombre réel vérifiant l'inégalité

$$\xi \leqq 0,$$

ne peut avoir, à l'intérieur de ce domaine, ni un maximum positif, ni un minimum négatif. Il est aisé d'en conclure que la valeur absolue d'un potentiel généralisé de simple couche ayant pour nombre caractéristique un nombre réel non négatif ne peut atteindre son maximum que sur la surface qui porte la simple couche; d'ailleurs, ce maximum existe toujours. Donc, le maximum δ_k de la valeur absolue de la fonction u_k coïncide avec le maximum de la valeur absolue de la fonction $(u_k)_s$.

Désignons par ρ un nombre positif au plus égal à 1 et soient B_1 et B_2 deux constantes positives dépendant uniquement de la surface (S). Il est aisé de voir que ces constantes peuvent être déterminées de façon que l'équation (30) entraîne l'inégalité

$$\delta_k < B_1 \rho\, \delta_{k-1} + B_2 \left(\log \frac{1}{\rho}\right) \sqrt{I_{2k-2}}$$

pour toutes les valeurs de ρ comprises entre zéro et l'unité. Une application de cette inégalité, tout à fait analogue à l'application de l'inégalité (24), faite au numéro précédent, permettra d'établir que le rayon de convergence de la série

$$(31) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \lambda^k$$

ne peut être inférieur à celui de la série (29). Il est évident d'ailleurs que

$$I_{2k} \leqq \delta_k^2 S$$

où S représente l'aire totale de la surface (S). Donc, le rayon de

convergence de la série (31) ne peut pas non plus être supérieur à celui de la série (29).

Par conséquent, les rayons de convergence des deux séries sont égaux. Or, le rayon de convergence de la série (31) coïncide avec celui de la série (5). Dès lors, le rayon de convergence de la série (5) est égal à celui de la série (29). C'est ce que nous voulions établir.

6. Pour aller plus loin, introduisons des intégrales tout à fait analogues à celles que M. Poincaré a considérées dans son Mémoire sur le problème de Dirichlet et la méthode de Neumann [1]. En d'autres termes, considérons les intégrales

$$(32)\qquad W_{i,k} = \iiint_{D} \left(\sum \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \mu^2 u_i u_k \right) dx\, dy\, dz$$

et

$$(33)\qquad W'_{i,k} = \iiint_{D_1} \left(\sum \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \mu^2 u_i u_k \right) dx\, dy\, dz$$

étendues au domaine (D) limité par la surface (S) et au domaine extérieur (D₁). On établira, au moyen du théorème de Green, en s'appuyant sur les équations (6), que les intégrales $W_{i,k}$ et $W'_{i,k}$ ne dépendent que de la somme $i + k$ des indices i et k; on profitera de cette circonstance pour effectuer le changement de notations défini par les équations

$$W_{i,k} = W_{i+k}$$
$$W'_{i,k} = W'_{i+k}$$

et l'on écrira les relations qui existent entre les intégrales considérées, ainsi

$$(34)\qquad W'_0 - W_0 = 2\int_S \zeta u_0\, ds,$$

$$(35)\qquad W_k + W'_k = W_{k+1} + W_{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

[1] *Acta mathematica*, 1896.

Désignons par α et β deux indéterminées réelles et considérons, en nous inspirant d'un artifice dû à M. Schwarz, l'expression

$$\iiint_{(D)} \left[\sum \left(\alpha \frac{\partial u_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 (\alpha u_n + \beta u_{n-1})^2 \right] dx\, dy\, dz$$
$$+ \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\alpha \frac{\partial u_n}{\partial x} - \beta \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 (\alpha u_n - \beta u_{n-1})^2 \right] dx\, dy\, dz.$$

Cette expression, considérée comme fonction des variables α et β, sera une forme quadratique définie. On peut en conclure, en se reportant à la définition des intégrales W_k et W'_k, que l'on aura

$$(W'_{2n-1} - W_{2n-1})^2 \leqq (W'_{2n} + W_{2n})(W'_{2n-2} + W_{2n-2}).$$

D'ailleurs, l'équation (35) nous donne

$$W'_{2n} + W_{2n} = W'_{2n-1} - W_{2n-1},$$

nous aurons donc

$$(36) \qquad W'_{2n} + W_{2n} = W'_{2n-2} + W_{2n-2}.$$

Observons maintenant que

$$W'_{2n} + W_{2n} = \iiint_{(D)} \left(\sum \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \mu^2 u_{n+1} u_{n-1} \right) dx\, dy\, dz$$
$$+ \iiint_{(D)} \left(\sum \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \mu^2 u_{n+1} u_{n-1} \right) dx\, dy\, dz.$$

Nous en déduirons, par le procédé employé il y a un instant, que

$$(37) \qquad (W'_{2n} + W_{2n})^2 \leqq (W'_{2n+2} + W_{2n+2})(W'_{2n-2} + W_{2n-2}).$$

Faisons encore une troisième application de l'artifice de M. Schwarz et posons à cet effet, dans l'équation (35), $k = 2n + 1$; elle nous donnera

$$W'_{2n} - W_{2n} = W'_{2n+1} + W_{2n+1}$$
$$= \iiint_{(D+D')} \left(\sum \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} + \mu^2 u_n u_{n+1} \right) dx\, dy\, dz,$$

où l'indice (D − D′) dénote que l'intégration doit être étendue à tout l'espace. On trouve

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &(W'_{2n} - W_{2n})^2 \\ &\quad - (W'_{2n+1} + W_{2n+1})^2 \leq (W'_{2n} + W_{2n})(W'_{2n+2} + W_{2n+2}), \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(39)\qquad \left(\frac{W'_{2n} - W_{2n}}{W'_{2n} + W_{2n}}\right)^2 \leq \frac{W'_{2n+2} + W_{2n+2}}{W'_{2n} + W_{2n}}.$$

Les inégalités (36) et (37) nous apprennent que la suite à termes positifs

$$(40)\qquad \frac{W'_0 + W_0}{W'_2 + W_2},\quad \frac{W'_2 + W_2}{W'_4 + W_4},\quad \frac{W'_4 + W_4}{W'_6 + W_6},\quad \ldots$$

sera convergente et décroissante (ou du moins non croissante) et que sa limite sera au moins égale à l'unité.

7. Il importe, pour ce qui va suivre, de démontrer que la limite de la suite (40) est précisément égale au carré du rayon de convergence R de la série (29). Soit R′ le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (40). Nous aurons à prouver que

$$(41)\qquad R = R'.$$

Je dis d'abord que

$$(42)\qquad R \leq R'.$$

En effet, il résulte du rapprochement des propositions établies dans les numéros précédents qu'aucune des séries (14) ne peut avoir un rayon de convergence inférieur au rayon de convergence R de la série (29). Multiplions chacune des séries (14) par $u_0 ds$ et intégrons en étendant l'intégration à toute la surface (S). Nous obtiendrons, de cette façon, les séries suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} W'_k \lambda^k \quad \text{et} \quad -\sum_{k=0}^{\infty} W_k \lambda^k,$$

dont aucune ne pourra avoir un rayon de convergence inférieur à R. Par conséquent, le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (W'_k + W_k)\lambda^k$$

ne pourra pas non plus être inférieur à R. Or le carré du rayon de convergence de cette série est égal à la limite R'^2 de la suite (40); cela résulte immédiatement des propriétés de la suite (40) et de l'une des relations (38). Par conséquent l'inégalité (42) aura bien lieu.

Prouvons maintenant que l'on a

$$R \geqq R'. \tag{43}$$

A cet effet, nous allons faire usage du théorème suivant dû à M. Stekloff [1]. Désignons par $\Phi(x, y, z)$ une fonction continue dans tout l'espace et même à la traversée de la surface (S); supposons qu'en chaque point de l'espace non situé sur la surface (S) cette fonction admette des dérivées premières continues; qu'en outre, pour des valeurs très grandes des variables x, y, z, le produit

$$\Phi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

reste fini et qu'enfin l'intégrale

$$\iiint_{(D+D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

étendue à tout l'espace, ait un sens. On aura

$$\int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds < L \iiint_{(D+D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz, \tag{44}$$

---

[1] *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes de la Physique mathématique* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. II).

où L est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S).

M. Stekloff trouve pour le nombre L une valeur qui ne convient pas à tous les cas. Aussi, quoiqu'une modification tout à fait insignifiante de sa démonstration permette d'arriver à un résultat parfaitement général, ne croyons-nous pas pouvoir nous dispenser d'établir ici cette importante proposition. Nous suivrons d'ailleurs la méthode de M. Stekloff, à la susdite modification près.

Posons

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} (\Phi)_s \frac{ds}{r}, \tag{45}$$

où r est la distance du point courant (x, y, z) à l'élément ds.

Nous avons

$$\iiint_{(D+D')} \left[\sum \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz = \int_{(S)} (\Phi)_s \left[\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right] ds = \int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds;$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \left[\int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds\right]^2 &< \iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \\ &\quad \times \iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

D'ailleurs,

$$\iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = \int_{(S)} (\psi)_s \left[\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right] ds = \int_{(S)} (\psi)_s (\Phi)_s\, ds;$$

d'où

$$\left\{\iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz\right\}^2 < \int_{(S)} (\psi)_s^2\, ds \int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds. \tag{47}$$

Observons maintenant que la formule (45) peut s'écrire ainsi :

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{(\Phi)_s}{\sqrt{r}}\frac{ds}{\sqrt{r}};$$

d'où

$$(48) \qquad \psi^2 < \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{(\Phi)_s^2}{r}\, ds \, \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{ds}{r} < L \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{(\Phi)_s^2}{r}\, ds,$$

où l'on a désigné [1] par L une limite supérieure de la fonction

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{ds}{r}.$$

Il sera aisé de déduire de l'inégalité précédente l'inégalité que voici

$$(49) \qquad \int_{(S)} (\psi)_s^2\, ds < L^2 \int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds.$$

On déduira très aisément des inégalités (46), (47) et (49) l'inégalité (44) que nous voulions établir.

Il résulte immédiatement de l'inégalité de M. Stekloff que l'on aura

$$I_{2k} < L(W'_{2k} + W_{2k})$$

et cela permet de conclure immédiatement que l'inégalité (43), que nous voulions démontrer, sera satisfaite.

En résumé, les relations (42) et (43) subsistent l'une et l'autre. Il faut donc que la relation (41) soit exacte. C'est ce qu'il s'agissait de prouver.

8. Voici les principaux résultats qui naissent du rapprochement des propositions établies dans les numéros précédents :

1° Si l'on désigne par R le rayon de convergence de la série (10), la valeur (12) de la fonction u vérifiera l'équation (1) pourvu que l'on ait

$$(50) \qquad |\lambda| < R$$

---

[1] M. Stekloff prend comme valeur de L le maximum de la distance de deux points situés sur la surface (S); c'est précisément cela qui n'est pas toujours exact.

et cette fonction u sera une fonction holomorphe du paramètre complexe λ pour toutes les valeurs de ce paramètre satisfaisant à l'inégalité précédente.

2° Le nombre R^2 est la limite de la suite (40). Or cette limite, nous l'avons vu, n'est jamais inférieure à l'unité. On aura donc

$$R \geqq 1.$$

3° Il existe, par conséquent, un potentiel généralisé u de simple couche qui vérifie l'équation (1) et qui est une fonction analytique du paramètre λ, laquelle fonction sera holomorphe par rapport à λ à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 au moins, tracé dans le plan de la variable complexe λ en prenant pour centre l'origine.

4° Nous avons vu au n° 2 que, sous la condition

$$|\lambda| < 1, \tag{51}$$

l'équation (1) ne peut admettre qu'une seule solution. Donc, en égard à ce qui précède, nous pouvons dire que l'équation (1) définit sans ambiguïté une fonction u qui, considérée comme fonction du paramètre λ, est une fonction analytique holomorphe dans le voisinage du point $\lambda = 0$.

Complétons ce qui précède en faisant voir que, lorsque le paramètre μ dépasse une certaine limite, le rayon de convergence de la série (5) est supérieur à l'unité. Considérons à cet effet la formule (30) et désignons, comme plus haut, par δ_k le maximum de la valeur absolue de u_k ou, ce qui est la même chose, le maximum de la valeur absolue de $(u_k)_s$.

Il est très aisé de voir qu'il est possible de trouver un nombre positif A dépendant uniquement de la surface (S), tel que l'on ait

$$\delta_k < \frac{A}{\mu}\delta_{k-1}.$$

Il en résulte que le rayon de convergence R de la série (5) vérifie l'inégalité

$$R \geqq \frac{\mu}{A}. \tag{52}$$

Il suffit donc de prendre

$$\mu > A \tag{53}$$

pour que l'on ait

$$R > 1.$$

Indiquons dès maintenant une conséquence importante résultant de la remarque précédente. Lorsque l'inégalité (53) est vérifiée, nous saurons déterminer un potentiel généralisé u de simple couche, tel que celle des quantités $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ que l'on voudra coïncide avec une fonction continue donnée.

9. Soit F un potentiel généralisé de simple couche ayant pour nombre caractéristique un nombre positif m vérifiant l'inégalité

$$m > A, \tag{54^a}$$

où A a la même signification que dans l'inégalité (53). Considérons les intégrales

$$\left\{\begin{aligned} K &= \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + m^2 F^2\right] dx\,dy\,dz, \\ K' &= \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + m^2 F^2\right] dx\,dy\,dz \end{aligned}\right. \tag{54}$$

étendues : la première à tout le domaine (D) limité par la surface (S); la seconde à tout le domaine extérieur (D'). Je me propose de prouver que l'on a

$$\frac{1 - \frac{A}{m}}{1 + \frac{A}{m}} \leq \frac{K}{K'} \leq \frac{1 + \frac{A}{m}}{1 - \frac{A}{m}}. \tag{55}$$

Soit toujours R le rayon de convergence de la série (5). On sait que la suite (40) est décroissante (ou du moins qu'un terme de cette

suite ne surpasse jamais le terme précédent), et que la limite de cette suite est R^2. On aura donc

$$\frac{W'_0 + W_0}{W'_2 + W_2} \geqq R^2.$$

D'ailleurs, l'inégalité (39) nous donne, en y faisant $n = 0$,

$$\left(\frac{W'_0 - W_0}{W'_0 + W_0}\right)^2 \leqq \frac{W'_2 + W_2}{W'_0 + W_0};$$

par conséquent,

$$\left(\frac{W'_0 - W_0}{W'_0 + W_0}\right)^2 \leqq \frac{1}{R^2}.$$

On en déduit, au moyen de l'inégalité (52),

$$\left(\frac{W'_0 - W_0}{W'_0 + W_0}\right)^2 \leqq \frac{A^2}{\mu^2}. \tag{56}$$

Soit

$$\mu > A;$$

l'inégalité (56) nous donnera

$$\frac{1 - \frac{A}{\mu}}{1 + \frac{A}{\mu}} \leqq \frac{W_0}{W'_0} \leqq \frac{1 + \frac{A}{\mu}}{1 - \frac{A}{\mu}}.$$

Or, cette inégalité ne diffère que par un changement de notations de l'inégalité (55) que nous voulions établir.

10. Considérons p fonctions réelles et continues $h_1, h_2, \ldots, h_p$ définies sur la surface (S) et p indéterminées réelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Posons

$$h = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k h_k, \tag{57}$$

et envisageons le potentiel généralisé de simple couche

$$(58) \qquad \Phi = \int_{(S)} h \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

ainsi que les intégrales

$$(59) \qquad \begin{cases} T' = \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz, \\ H' = \iiint_{(D')} \Phi^2 dx\, dy\, dz, \end{cases}$$

étendues à tout le domaine (D') extérieur à la surface (S). Je dis qu'il suffira d'assujettir les α à vérifier un certain système de n équations linéaires et homogènes, le nombre n ne devant pas être inférieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S), pour que l'on ait

$$(60) \qquad T' \geqq M' H' n^{\frac{2}{3}},$$

où M' est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S).

Soit (S_1) une sphère fixe ayant l'origine des coordonnées pour centre, telle que toute la surface (S) se trouve à l'intérieur de cette sphère. Elle partagera le domaine (D') en deux autres dont l'un, D'_2, lui sera extérieur, et dont l'autre, D'_1, sera limité par elle et par la surface (S). Décomposons chacune des intégrales T' et H' en deux autres se rapportant respectivement au domaine (D'_1) et au domaine (D'_2). Posons ensuite, pour mettre cette décomposition en évidence,

$$(61) \qquad H' = H'_1 + H'_2, \qquad T' = T'_1 + T'_2.$$

Un théorème bien connu, dû à M. Poincaré, nous apprend que l'on aura

$$(62) \qquad T'_1 \geqq M'_1 n_1^{\frac{2}{3}} H'_1,$$

pourvu que les α vérifient un certain système de n_1 équations linéaires

et homogènes et que le nombre n_1 soit lui-même supérieur à une certaine limite dépendant uniquement de la surface (S) et du choix de la sphère (S_1).

Pour aller plus loin, désignons par ψ la fonction vérifiant l'équation de Laplace dans le domaine (D'_2), se réduisant à zéro à l'infini et prenant sur la sphère (S_1) les mêmes valeurs que la fonction Φ. Posons pour un moment

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

On aura, dans tout le domaine (D'_2) et sur la sphère (S_1) elle-même,

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pi_k}{\rho^{2k+1}},$$

où les Π_k sont des polynomes sphériques ayant pour coefficients des fonctions linéaires et homogènes des α_i. Si nous assujettissons les α_i à vérifier un certain système de t^2 équations linéaires et homogènes, nous ferons disparaître les t premiers termes de la série précédente. On verra aisément que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\iiint_{(D_2)} \psi^2\, dx\, dy\, dz$$

étendue au domaine (D'_2) extérieur à la sphère (S_1) aura un sens et qu'elle satisfera à l'inégalité

$$(63) \qquad \iiint_{(D_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dy\, dz \geqq \frac{(t+1)(2t-1)}{\rho_0^2} \iiint_{(D_2)} \psi^2\, dx\, dy\, dz,$$

où ρ_0 représente le rayon de la sphère (S_1).

Posons

$$(64) \qquad f = \Phi - \psi.$$

La fonction f s'annulera sur la sphère (S_1) et vérifiera, à l'extérieur de cette sphère, l'équation

$$\Delta f - \mu^2 f - \mu^2 \psi = 0;$$

enfin, à l'infini, la valeur absolue de la fonction f et les valeurs absolues de ses dérivées premières seront comparables à $\frac{1}{\rho}$ et à $\frac{1}{\rho^2}$. On conclura aisément de tout cela que

$$\iiint_{(D_2^1)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz = -\mu^2 \iiint_{(D_2^1)} \psi f\,dx\,dy\,dz;$$

d'où

$$\left\{\iiint_{(D_2^1)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz\right\}^2$$
$$\leqq \mu^4 \iiint_{(D_2^1)} \psi^2\,dx\,dy\,dz \iiint_{(D_2^1)} f^2\,dx\,dy\,dz,$$

mais

$$\mu^2 \iiint_{(D_2^1)} f^2\,dx\,dy\,dz \leqq \iiint_{(D_2^1)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz;$$

par conséquent,

$$\iiint_{(D_2^1)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz \leqq \mu^2 \iiint_{(D_2^1)} \psi^2\,dx\,dy\,dz,$$

ce qui donne

$$\iiint_{(D_2^1)} f^2\,dx\,dy\,dz \leqq \iiint_{(D_2^1)} \psi^2\,dx\,dy\,dz.$$

On conclura aisément de cette inégalité, en se reportant à l'équation (64), que

$$(65) \qquad H'_2 = \iiint_{(D_2)} \Phi^2\,dx\,dy\,dz \leqq 4 \iiint_{(D_2^1)} \psi^2\,dx\,dy\,dz.$$

D'ailleurs, d'après un théorème connu,

$$(66) \quad \iiint_{(D_2^1)} \left[\sum\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right] dt \leqq \iiint_{(D_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = T'_2.$$

Les inégalités (63), (65) et (66) nous donnent

$$(67) \qquad T_2' \geq \frac{(t+1)(2t-1)}{4\varepsilon_0^2} H_2.$$

Si l'on pose $n = n_1 + t^2$ et si l'on établit une relation convenable entre n_1 et t, on trouve, en s'appuyant sur les inégalités (62) et (67), que l'inégalité (60) sera bien vérifiée dans les conditions dites plus haut.

11. Reprenons le potentiel généralisé F considéré au n° **9** et le potentiel généralisé Φ que nous avons envisagé au numéro précédent. Je vais faire voir que, étant donné le potentiel Φ, il est possible de déterminer le potentiel F de façon que la différence $F - \Phi$ prenne la valeur zéro sur la surface (S). Supposons provisoirement que le problème soit possible et désignons par ω une fonction définie à l'intérieur de la surface (S) par l'équation

$$(66) \qquad \omega = F - \Phi.$$

La fonction ω sera nulle sur la surface (S) et vérifiera, à l'intérieur de cette surface, l'équation suivante :

$$(69) \qquad \Delta\omega - m^2\omega + (\mu^2 - m^2)\Phi = 0.$$

Que la fonction F existe ou non, il est aisé de déterminer la fonction ω de façon qu'elle s'annule sur la surface (S) et qu'elle vérifie l'équation (69) à l'intérieur de cette surface. En effet, posons

$$P = \frac{\mu^2 - m^2}{4\pi} \iiint_{(\Omega)} \Phi(x', y', z') \frac{e^{-mr}}{r} dx'\, dy'\, dz',$$

où r représente la distance du point (x, y, z) au point (x', y', z'). La fonction P vérifiera à l'intérieur de la surface (S) l'équation

$$\Delta P - m^2 P + (\mu^2 - m^2)\Phi = 0,$$

mais, à l'extérieur de la surface (S), elle satisfera à l'équation

$$\Delta P - m^2 P = 0.$$

Le nombre m vérifiant l'inégalité (54^a), nous saurons déterminer un potentiel généralisé Q ayant le nombre m pour nombre caractéristique, de façon que l'on ait

$$(70) \qquad \left(\frac{dQ}{dN}\right)_e = \left(\frac{dP}{dN}\right)_e.$$

C'est ce qui résulte des remarques qui se trouvent à la fin du n° 8, La relation (70) nous donne

$$(Q)_s = (P)_s.$$

Par conséquent, la fonction demandée ω sera donnée par la formule

$$(71) \qquad \omega = P - Q.$$

Envisageons maintenant le domaine (D′) extérieur à la surface (S). Nous serons amenés à considérer une fonction ω' s'annulant sur la surface (S) et à l'infini et vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D′) l'équation

$$(72) \qquad \Delta\omega' - m^2\omega' + (\mu^2 - m^2)\Phi = 0.$$

Cette fonction pourra être déterminée par une méthode absolument analogue à celle qui nous a servi à calculer la fonction ω.

Cela posé, considérons une fonction F_1 égale à $\omega + \Phi$ à l'intérieur de la surface (S) et coïncidant avec la fonction $\omega' + \Phi$ à l'extérieur de cette surface. La fonction F_1 vérifiera l'équation

$$\Delta F_1 - m^2 F_1 = 0,$$

tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la surface (S); elle sera continue à la traversée de la surface; les quantités $\left(\frac{dF_1}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{dF_1}{dN}\right)_e$ existeront et

seront continues; enfin, à l'infini les expressions

$$\rho F_1, \qquad \rho^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}, \qquad \rho^2 \frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad \rho^2 \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

resteront finies. On aura donc

$$F_1 = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\left(\frac{dF_1}{dN} \right)_e - \left(\frac{dF_1}{dN} \right)_i \right] \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

D'ailleurs, sur la surface (S), la fonction F_1 prend les mêmes valeurs que la fonction Φ.

Il résulte de tout cela que le potentiel généralisé de simple couche, désigné plus haut par F, existera et que l'on aura

$$F = F_1.$$

La proposition que nous voulions établir est donc démontrée.

12. Revenons encore une fois au potentiel Φ défini par l'équation (58) et considérons les quantités T′ et H′ définies par les équations (59) ainsi que les quantités T et H qui s'en déduisent, en étendant l'intégration au domaine (D) limité par la surface (S) au lieu de l'étendre au domaine extérieur (D′).

Posons

$$(73) \quad \begin{cases} \mathfrak{W} = \iiint_D \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \Phi^2 \right] dx\,dy\,dz = T + \mu^2 H, \\ \mathfrak{W}' = \iiint_D \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \Phi^2 \right] dx\,dy\,dz = T' + \mu^2 H', \end{cases}$$

et admettons que le nombre de termes p de la somme qui se trouve au second membre de l'équation (57) vérifie l'inégalité $p > 2n$, où n est un entier supérieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S) et du nombre μ. Je me propose de prouver qu'en assujettissant les α_i à vérifier un certain système de $2n$ équations linéaires

et homogènes, on pourra toujours satisfaire à la fois aux deux inégalités

$$(74)\qquad \begin{cases} \mathfrak{W} \geqq \Theta_n \mathfrak{W}', \\ \mathfrak{W}' \geqq \Theta_n \mathfrak{W}, \end{cases}$$

où Θ_n est un nombre positif supérieur à l'unité ne dépendant que de la surface (S) et du nombre n, ayant l'unité pour limite lorsque le nombre n croît indéfiniment.

Nous avons vu, au numéro précédent, que l'on peut trouver un potentiel généralisé de simple couche F ayant le nombre m pour nombre caractéristique, prenant sur la surface (S) les mêmes valeurs que le potentiel Φ.

Désignons, comme au numéro précédent, par ω la différence $F - \Phi$ dans le domaine (D) et par ω' la valeur de la même expression dans le domaine (D'). Posons, pour abréger l'écriture,

$$(75)\qquad \begin{aligned} E &= \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + m^2 \omega^2 \right] dx\,dy\,dz, \\ L &= \iiint_{(D)} \left[\sum \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m^2 \omega \Phi \right] dx\,dy\,dz, \\ N &= \iiint_{(D)} \omega \Phi\, dx\,dy\,dz, \end{aligned}$$

et désignons par E', L' et N' les expressions analogues relatives au domaine extérieur (D').

Cela posé, on trouvera pour les intégrales K et K' définies par les équations (54) les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} K &= \mathfrak{W} + (m^2 - \mu^2) H + 2L + E, \\ K' &= \mathfrak{W}' + (m^2 - \mu^2) H' + 2L' + E'. \end{aligned}$$

Or le théorème de Green nous donne

$$(76)\qquad \begin{cases} L = (m^2 - \mu^2) N, \\ E = (\mu^2 - m^2) N, \\ L' = (m^2 - \mu^2) N', \\ E' = (\mu^2 - m^2) N'; \end{cases}$$

il viendra donc

$$(77)\qquad \begin{cases} K = \mathfrak{W} + (m^2 - \mu^2)(H + N), \\ K' = \mathfrak{W}' + (m^2 - \mu^2)(H' + N'). \end{cases}$$

Les relations (75) et (76) nous donnent, en s'appuyant sur l'inégalité de Schwarz,

$$(78)\qquad E^2 \leqq (m^2 - \mu^2)^2 H \int\int\int_D \omega^2 dx dy dz.$$

Soit

$$(79)\qquad m \geqq \mu;$$

nous aurons

$$(m^2 - \mu^2) \int\int\int_D \omega^2 dx dy dz \leqq E,$$

et nous conclurons de l'inégalité (78) que l'on aura

$$E \leqq (m^2 - \mu^2) H,$$

d'où, en tenant compte de (76),

$$(80)\qquad -N \leqq H.$$

On trouvera d'une façon analogue

$$(81)\qquad -N' \leqq H'.$$

Posons

$$(82)\qquad \begin{cases} t = (m^2 - \mu^2) \dfrac{H + N}{\mathfrak{w}}, \\ t' = (m^2 - \mu^2) \dfrac{H' + N'}{\mathfrak{w}'}. \end{cases}$$

Les nombres t et t' seront positifs en vertu des inégalités (79), (80)

et (81). Par conséquent, à cause des équations (77),

$$\frac{K}{K'} \leqq \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}'}(1+t),$$

$$\frac{K'}{K} \leqq \frac{\mathfrak{w}'}{\mathfrak{w}}(1+t').$$

On trouve, en rapprochant ces inégalités des inégalités (55),

$$(83)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{w}' &\leqq \frac{1+\frac{A}{m}}{1-\frac{A}{m}}(1+t)\mathfrak{w}, \\ \mathfrak{w} &\leqq \frac{1+\frac{A}{m}}{1-\frac{A}{m}}(1+t')\mathfrak{w}'. \end{aligned}\right.$$

Si les α_k vérifient un certain système de n équations linéaires et homogènes, l'inégalité (60) aura lieu; si, en outre, les α_i satisfont à un certain autre système de n équations linéaires et homogènes et si n est supérieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S), nous aurons, comme nous l'apprend un théorème bien connu dû à M. Poincaré,

$$(84)\qquad T \geqq MHn^{\frac{2}{3}},$$

où M est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S).

Désignons par b le plus grand des nombres $\frac{1}{M}$ et $\frac{1}{M'}$ et observons qu'à raison des relations (73) on a

$$\mathfrak{w} \geqq T; \qquad \mathfrak{w}' \geqq T';$$

les inégalités (60) et (84) nous donneront

$$\frac{H}{\mathfrak{w}} \leqq bn^{-\frac{2}{3}},$$

$$\frac{H'}{\mathfrak{w}'} \leqq bn^{-\frac{2}{3}}.$$

On en conclut, au moyen des relations (79), (80), (81), (82) et en remarquant, en outre, que les nombres N et N′ sont négatifs,

$$(85)\qquad \begin{cases} t \leqq b\,\dfrac{m^2}{n^{\frac{2}{3}}}, \\ t' \leqq b\,\dfrac{m^2}{n^{\frac{2}{3}}}. \end{cases}$$

Si le nombre n est assez grand, la relation

$$\frac{m^2}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{m}$$

sera compatible avec les inégalités (79) et (54^a). Cette remarque faite, les inégalités (83) et (85) nous permettent d'énoncer la proposition suivante : si le nombre n est supérieur à une certaine limite ne dépendant que du nombre μ et de la surface (S), il suffit que les α_i vérifient un certain système de $2n$ équations linéaires et homogènes pour que l'on ait à la fois

$$\begin{cases} \mathfrak{W} \leqq \left(1 + \dfrac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right)\mathfrak{W}', \\ \mathfrak{W}' \leqq \left(1 + \dfrac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right)\mathfrak{W}, \end{cases}$$

où B est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S). Cela prouve que, dans les inégalités (74), nous pouvons poser

$$(86)\qquad \Theta_n = 1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}}.$$

Donc, comme nous l'avions annoncé, Θ_n tend vers l'unité lorsque n croît indéfiniment.

15. Revenons à la suite (40). Cette suite est déterminée par la fonction φ qui figure dans l'équation (1).

Supposons que la fonction φ soit donnée par la formule

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi_k, \tag{87}$$

où les α_k sont des indéterminées réelles, les φ_k étant des fonctions continues réelles définies sur la surface (S). Admettons, en outre, que

$$p > 4n, \tag{88}$$

n étant un entier positif assez grand pour que les résultats du numéro précédent soient valables. Je vais faire voir qu'il sera possible de disposer des indéterminées α_k de telle sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} > 2\frac{n^{\frac{2}{9}}}{\mathrm{B}}, \tag{89}$$

où R est le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (40).

A cet effet, désignons par t et t' deux nouvelles indéterminées et par Φ_k, $\mathfrak{W}_k$ et $\mathfrak{W}'_k$ ce que deviennent les expressions u_k, W_k et W'_k quand on change φ en

$$t\varphi + \frac{1}{2}t'\left[\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i\right].$$

Appliquons à la fonction Φ_k le théorème démontré au numéro précédent. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{W}_{2k} &\leqq \Theta_n \mathfrak{W}'_{2k}, \\ \mathfrak{W}'_{2k} &\leqq \Theta_n \mathfrak{W}_{2k}, \end{aligned}\right. \tag{90}$$

pourvu que les α_k vérifient un certain système de $2n$ équations linéaires et homogènes.

Ces équations pourront s'écrire ainsi

$$t\mathcal{F}_k + t'\mathcal{F}'_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{91}$$

où $\mathcal{F}_k$ et $\mathcal{F}'_k$ représentent des expressions ne contenant ni t ni t'. Nous

disposons d'un nombre $p > 4n$, d'indéterminées α_k. Nous pourrons donc disposer des rapports entre ces indéterminées de telle sorte que le système (91) soit vérifié, quelles que soient les valeurs attribuées aux facteurs t et t'.

Pour cela, nous n'avons qu'à déterminer ces rapports au moyen des $4n$ équations

$$(92) \qquad \mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}'_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Ces équations étant satisfaites, les inégalités (90) subsisteront pour *toutes* les valeurs réelles des facteurs t et t'. Pour aller plus loin, nous nous inspirerons d'un passage du Mémoire de M. Poincaré sur le Problème de Dirichlet et la Méthode de Neumann.

Nous avons

$$\mathfrak{W}_{2k} = W_{2k}t^2 + 2W_{2k+1}tt' + W_{2k+2}t'^2,$$
$$\mathfrak{W}'_{2k} = W'_{2k}t^2 + 2W'_{2k+1}tt' + W'_{2k+2}t'^2;$$

les inégalités (90) ayant lieu pour toutes les valeurs réelles de t et t', nous aurons, quels que soient t et t',

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\Theta_n W_{2k} - W'_{2k})t^2 + 2(\Theta_n W_{2k+1} - W'_{2k+1})tt' \\ &\qquad\qquad + (\Theta_n W_{2k+2} - W'_{2k+2})t'^2 > 0, \\ &(\Theta_n W'_{2k} - W_{2k})t^2 + 2(\Theta_n W'_{2k+1} - W_{2k+1})tt' \\ &\qquad\qquad + (\Theta_n W'_{2k+2} - W_{2k+2})t'^2 > 0. \end{aligned} \right.$$

Changeons dans la dernière inégalité t' en $-t'$. Il viendra

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\Theta_n W'_{2k} - W_{2k})t^2 - 2(\Theta_n W'_{2k+1} - W_{2k+1})tt' \\ &\qquad\qquad + (\Theta_n W'_{2k+2} - W_{2k+2})t'^2 > 0. \end{aligned} \right.$$

Puisque les inégalités (93) et (94) ont lieu pour toutes les valeurs réelles de t et t', il en sera de même de celles que l'on obtient en les ajoutant membre à membre. Nous aurons donc, quels que soient t et t',

$$\begin{aligned} (\Theta_n - 1)(W'_{2k} + W_{2k})t^2 - 2(\Theta_n + 1)(W'_{2k+1} - W_{2k+1})tt' \\ + (\Theta_n - 1)(W'_{2k+2} + W_{2k+2})t'^2 > 0; \end{aligned}$$

d'où

$$(95)\quad (W'_{2k+1} - W_{2k+1})^2 \leqq \left(\frac{\Theta_n - 1}{\Theta_n + 1}\right)^2 (W'_{2k} + W_{2k})(W'_{2k+2} + W_{2k+2}).$$

Changeons, dans l'équation (35), k en $2k+2$, il viendra

$$(96)\qquad W'_{2k+2} + W_{2k+2} = W'_{2k+1} - W_{2k+1}.$$

Les relations (95) et (96) donnent

$$(97)\qquad W'_{2k+2} + W_{2k+2} \leqq \left(\frac{\Theta_n - 1}{\Theta_n + 1}\right)^2 (W'_{2k} + W_{2k}).$$

Raisonnons comme l'a fait M. Poincaré dans un cas analogue et regardons à cet effet $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ comme les coordonnées homogènes d'un point situé dans un espace à $p-1$ dimensions. D'après ce que nous venons de voir, il existera dans cet espace à $p-1$ dimensions un point au moins où l'inégalité (97) sera vérifiée. Désignons par (D_k) le domaine formé par l'ensemble des points jouissant de cette propriété. La suite (40) étant décroissante, ou du moins non croissante, chaque domaine (D_k) sera contenu dans le domaine (D_{k-1}) ou coïncidera avec ce domaine. Par conséquent, il existera au moins un point

$$(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)})$$

intérieur à tous les domaines

$$(D_1),\quad (D_2),\quad (D_3),\quad \ldots,$$

et il est évident que, en un tel point, l'inégalité (97) aura lieu quel que soit k. Donc, en ce point-là, la limite R^2 de la suite (40) sera au moins égale à

$$\left(\frac{\Theta_n - 1}{\Theta_n + 1}\right)^2.$$

On en conclut, au moyen de la formule (86), que, au point

$$(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}),$$

on aura

$$R > \frac{2n^{\frac{2}{3}}}{B}.$$

Donc, le théorème que nous voulions établir est démontré.

14. Le théorème précédent et les résultats énoncés au n° **8** permettront d'appliquer aisément à l'étude de la fonction u, définie par la série (5), la méthode si féconde de M. Poincaré [1]. On trouvera que la fonction u considérée comme fonction du paramètre λ n'a, à distance finie, d'autres points singuliers que des pôles. On s'assurera aisément que ces pôles sont simples et l'on verra que le résidu U relatif à un pôle λ' sera un potentiel généralisé de simple couche vérifiant l'équation

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU}{dN}\right)_i = \lambda'\left[\left(\frac{dU}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU}{dN}\right)_i\right].$$

On reconnaîtra, en rapprochant ceci de ce qui a été établi au n° **2**, que les pôles de la fonction u, définie par la série (5), ne peuvent être que des nombres réels, supérieurs en valeur absolue à 1, sauf dans le cas où le nombre caractéristique μ du potentiel généralisé u, serait nul; dans ce cas, la fonction u peut avoir, en dehors des pôles supérieurs en valeur absolue à 1, un pôle égal à $+1$.

Montrons qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de potentiels généralisés de simple couche

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_p$$

ayant pour nombre caractéristique le nombre positif μ et vérifiant les équations

$$(98) \qquad \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_i = \lambda_k\left[\left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_i\right],$$

où les λ_k sont des nombres réels non supérieurs en valeur absolue à un nombre positif déterminé l.

---

[1] *Sur les équations de la Physique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894).

On trouve immédiatement, en s'appuyant sur le théorème de Green, que l'inégalité

$$\lambda_k \neq \lambda_{k'} \tag{99}$$

entraîne la relation

$$\int_{(S)} \psi_k \left(\frac{d\psi_{k'}}{dN}\right)_i ds = \int_{(S)} \psi'_k \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_e ds = 0. \tag{100}$$

Dans les conditions où nous nous sommes placés, l'inégalité

$$k \neq k' \tag{101}$$

peut ne pas entraîner l'inégalité (99). Par conséquent, l'inégalité (101) n'a pas pour conséquence nécessaire la relation (100). Cependant, on peut, sans nuire à la généralité, admettre que l'inégalité (101) entraîne l'inégalité (100).

En effet, si cette circonstance ne se présentait pas tout d'abord, on pourrait la réaliser en remplaçant les fonctions ψ_i par certaines combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants de ces fonctions.

Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} A_k &= \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 \psi_k^2\right] dx\, dy\, dz, \\ A'_k &= \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 \psi_k^2\right] dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Les équations (98) nous donnent

$$A_k(\lambda_k + 1) = A'_k(\lambda_k - 1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{103}$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des indéterminées et posons

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \psi_k,$$

$$A = \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 \psi^2\right] dx\, dy\, dz,$$

$$A' = \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 \psi^2\right] dx\, dy\, dz.$$

Nous aurons, en considérant que l'inégalité (101) entraîne les relations (100),

$$(104)\quad \begin{cases} A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 A_k, \\ A' = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 A'_k. \end{cases}$$

Supposons d'abord que les λ_k soient tous positifs et qu'ils soient rangés par ordre de grandeur croissante. Nous aurons, en vertu des équations (103),

$$A' = \frac{\lambda_p + 1}{\lambda_p - 1} A,$$

et cela quels que soient les α_k. Or, en vertu du théorème démontré au n° **12**, il est possible, si le nombre p est assez grand, de disposer des rapports entre les α_k de façon que l'on ait

$$A' = \left(1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right) A,$$

où n est le plus grand entier positif inférieur à $\frac{p}{2}$. On aura donc, en disposant convenablement des rapports entre les α_k,

$$A \frac{\lambda_p + 1}{\lambda_p - 1} = A \left(1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right),$$

d'où, puisque $A \neq 0$,

$$\frac{\lambda_p + 1}{\lambda_p - 1} = 1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}},$$

ce qui donne, en tenant compte de ce que $\lambda_p > 1$, l'inégalité

$$(105)\quad \lambda_p > \frac{n^{\frac{2}{9}}}{B}.$$

Supposons maintenant que les λ_p soient tous *négatifs* et disposons

les notations de façon que l'on ait

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_p.$$

Nous trouverons, d'une façon analogue,

$$(106) \qquad -\lambda_p > \frac{n^{\frac{2}{9}}}{B},$$

où n représente, comme plus haut, le plus grand entier positif inférieur à $\frac{p}{2}$.

Passons au cas général et disposons les notations de façon que l'on ait

$$|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3| \leqq \ldots \leqq |\lambda_p|.$$

Désignons par n le plus grand entier vérifiant l'inégalité

$$4n < p.$$

Il est évident que l'on pourra toujours trouver, dans la suite finie

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p,$$

$2n + 1$ termes au moins ayant le même signe.

Suivant que ces $2n + 1$ termes seront positifs ou négatifs, on pourra leur appliquer le théorème exprimé par l'inégalité (105) ou le théorème exprimé par l'inégalité (106).

On constatera, dans les deux cas, que l'on aura

$$|\lambda_p| > \frac{n^{\frac{2}{9}}}{B}.$$

Désignons par C une constante positive convenablement choisie. Nous pourrons exprimer les résultats obtenus sous la forme suivante : le nombre p étant supérieur à une certaine limite dépendant seulement de la surface (S) et du nombre μ, on aura

$$(107) \qquad |\lambda_p| > C p^{\frac{2}{9}}.$$

Donc, si l'on impose aux λ_k la condition

$$|\lambda_k| < l \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

et si l'on veut que les ψ_k soient linéairement indépendants, le nombre de termes de la suite

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$$

sera fini. C'est ce que nous voulions démontrer.

Mais peut-on affirmer que des fonctions telles que les ψ_k existeront? Pour cela, il n'y a qu'à s'assurer que le rayon de convergence de la série (5) n'est pas, en général, infini. Or, le carré de ce rayon de convergence est égal à la limite de la suite (40); il ne pourrait donc être infini que dans le cas où l'on aurait

$$W_2 + W_2 = 0,$$

ce qui donne $u_1 = 0$. On en conclurait, au moyen des équations (6),

$$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 0.$$

Or, en supposant même que cette circonstance puisse se présenter, elle ne le pourrait que pour un choix très particulier de la fonction φ.

On tire de tout ce qui précède la conclusion suivante : l'équation

$$(108) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + 2\varphi$$

admet une solution u, fonction analytique du paramètre λ, jouissant des propriétés énoncées dans l'Introduction; en dehors de cette solution-là, l'équation précédente peut admettre une autre solution u' qui ne sera pas une fonction analytique de λ, mais la fonction u' ne pourra différer de la fonction u que pour des valeurs isolées de λ, valeurs qui feront nécessairement partie de la suite (6) de l'Introduction.

15. Il résulte de ce que nous venons de voir que la série (5) aura

un rayon de convergence supérieur à 1 pourvu que l'on ait $\mu > 0$. On pourra donc, dans ce cas, résoudre, au moyen de la série précédente, le problème qui consiste à déterminer une fonction U vérifiant dans le domaine (D) ou dans le domaine (D') l'équation $\Delta u - \mu^2 u = 0$, s'annulant dans le second cas à l'infini et telle que la dérivée suivant la normale coïncide avec une fonction continue, donnée *a priori*.

Voyons dans quelle mesure tout cela est applicable au cas où $\mu = 0$, c'est-à-dire à l'équation de Laplace. Nous avons vu qu'en dehors du pôle $+1$ que le potentiel u peut avoir dans ce cas, les valeurs absolues de tous les autres pôles de cette fonction sont supérieures à l'unité. Supposons que le pôle $+1$ existe effectivement et soit $-P$ le résidu correspondant. La fonction P sera un potentiel de simple couche et nous pourrons poser

$$u = \frac{P}{1-\lambda} + u' \tag{109}$$

où u' sera un potentiel de simple couche. La fonction u' et les dérivées $\left(\frac{du'}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{du'}{dN}\right)_e$, en tant que fonctions du paramètre complexe λ, seront holomorphes dans un cercle de rayon supérieur à l'unité ayant pour centre l'origine des coordonnées dans le plan de cette variable. D'autre part, les théorèmes généraux établis plus haut nous apprennent que

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_i = 0. \tag{110}$$

Donc, la fonction P se réduira sur la surface (S) à une constante ; autrement dit

$$(P)_s = \text{const.} \tag{111}$$

Remarquons, en passant, que P est le potentiel d'une couche électrique sans action sur un point intérieur. Portons la valeur (109) de u dans l'équation (1). La relation (110) nous apprend qu'il viendra

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_e + \left(\frac{du'}{dN}\right)_e - \left(\frac{du'}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{\partial u'}{dN}\right)_e + \left(\frac{du'}{dN}\right)_i\right] + 2\rho;$$

posons $\lambda = +1$, multiplions ensuite l'équation précédente par ds et intégrons en étendant l'intégration à toute la surface (S). Il viendra

$$2\int_S \varphi\, ds = \int_S \left(\frac{dP}{dN}\right)_e ds = (P)_s \int_S ds = (P)_s S,$$

où S représente l'aire totale de la surface (S). Il résulte de cette relation que la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre $+1$ soit un pôle du potentiel u est la suivante :

$$\int_S \varphi\, ds \neq 0. \tag{112}$$

Si donc on a

$$\int_S \varphi\, ds = 0,$$

tout ce qui a été dit au début au sujet du cas où $\mu > 0$ reste encore applicable quand on a $\mu = 0$.

Examinons de plus près ce qui arrive lorsque l'inégalité (112) est satisfaite.

Il résulte immédiatement de la comparaison de la série (5) avec celle que l'on obtient en développant le second membre de l'équation (109) suivant les puissances de λ, que l'on aura

$$P = \lim(u_n)_{n=\infty}.$$

Considérons maintenant la fonction σ définie par la série (10) et observons que l'on a, pour $|\lambda| < 1$,

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = 4\pi\sigma = 2\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k.$$

Développons le premier membre de cette équation suivant la puissance de λ, après y avoir porté la valeur (109) de u. L'identification des coefficients nous donnera

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_e = 2\lim(\sigma_n)_{n=\infty},$$

relation qui démontre la légitimité de la méthode donnée par Robin pour déterminer la densité d'une couche sans action sur un point intérieur.

Les propositions que nous venons de démontrer et un théorème classique relatif à l'équation de Laplace conduisent immédiatement aux théorèmes suivants :

1° Pour qu'il soit possible de trouver une fonction u vérifiant l'équation de Laplace à l'intérieur de la surface (S) et satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = f.$$

où f est une fonction continue donnée, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\int_S f\,ds = 0;$$

2° Il est toujours possible de déterminer une fonction u vérifiant l'équation de Laplace dans tout l'espace extérieur à la surface (S), s'annulant à l'infini et telle que l'on ait

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = f$$

où f a la même signification que tout à l'heure.

III. — Problème fondamental relatif aux potentiels généralisés de double couche. Méthode de Neumann.

16. Proposons-nous de déterminer un potentiel généralisé de double couche v vérifiant l'équation

$$(1) \qquad (v)_i - (v)_e = \lambda[(v)_i + (v)_e] + 2\varphi,$$

où les lettres λ et φ ont la même signification que dans les numéros précédents. Supposons d'abord que la fonction φ soit telle que le po-

tentiel

$$(2) \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_S \varphi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds$$

possède la dérivée $\frac{dv_0}{dN}$ et que cette dérivée soit continue. Cela posé, envisageons le potentiel de simple couche u défini par l'équation

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + 2\frac{dv_0}{dN},$$

et définissons une fonction v' de la façon suivante : on a, à l'*intérieur* de la surface (S),

$$(4) \qquad v' = \frac{\lambda u + v_0}{1-\lambda};$$

mais à l'*extérieur* de cette surface, soit

$$(5) \qquad v' = \frac{\lambda u + v_0}{1+\lambda}.$$

Les formules (4) et (5) donnent

$$\left(\frac{dv'}{dN}\right)_i = \frac{\lambda\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{dv_0}{dN}}{1-\lambda},$$

$$\left(\frac{dv'}{dN}\right)_e = \frac{\lambda\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \frac{dv_0}{dN}}{1+\lambda};$$

d'où, en s'appuyant sur l'équation (3),

$$(6) \qquad \left(\frac{dv'}{dN}\right)_i = \left(\frac{dv'}{dN}\right)_e.$$

Posons

$$(7) \qquad v' = \frac{1}{4\pi}\int_S [(v')_i - (v')_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds$$

et

$$\Phi = v' - v''; \tag{8}$$

nous aurons

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e,$$
$$(\Phi)_i = (\Phi)_e.$$

On déduit immédiatement de là, en tenant compte de la façon dont Φ se comporte à l'infini

$$\Phi = 0.$$

Par conséquent, à cause de la relation (8),

$$v'' = v';$$

cela prouve que la fonction v' est un potentiel de double couche. D'ailleurs, les relations (4) et (5) nous donnent

$$\left\{\begin{aligned} (v')_i(1-\lambda) &= \lambda(u)_s + (v_0)_i, \\ (v')_e(1+\lambda) &= \lambda(u)_s + (v_0)_e, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

d'où

$$(v')_i(1-\lambda) - (v')_e(1+\lambda) = (v_0)_i - (v_0)_e,$$

or

$$(v_0)_i - (v_0)_e = 2\mathfrak{z};$$

il viendra donc, après une transformation immédiate,

$$(v')_i - (v')_e = \lambda[(v')_i + (v')_e] + 2\mathfrak{z}. \tag{10}$$

Il résulte de la comparaison de cette équation à l'équation (1) que v' est une solution de cette équation.

Les formules (9) nous donnent

$$(v')_i + (v')_e = \frac{\lambda(u)_s + (v_0)_i}{1-\lambda} + \frac{\lambda(u)_s + (v_0)_e}{1+\lambda}. \tag{11}$$

Supposons que u soit celle des solutions de l'équation (3) qui est analytique par rapport à λ.

La formule (11) nous apprend que, dans ce cas, la fonction $(v')_i + (v')_e$ sera aussi une fonction analytique du paramètre λ. On pourrait croire que cette fonction admet forcément les pôles $+1$ et -1. En réalité, il n'en est pas ainsi. Pour le voir, assurons-nous que la fonction u, en tant que fonction de λ, sera holomorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon plus grand que l'unité, ayant l'origine des coordonnées dans le plan de la variable complexe λ pour centre. En effet, si $\mu > 0$, la proposition résulte immédiatement de ce qui a été établi au Chapitre précédent. Soit donc $\mu = 0$. On aura dans ce cas

$$\int_{(S)} \frac{dv_0}{dN} ds = 0;$$

par conséquent (15) la fonction u ne peut avoir que des pôles supérieurs en valeur absolue à l'unité. Cela posé, désignons par u' la valeur de la fonction u pour $\lambda = +1$ et soit u'' la valeur de la même fonction pour $\lambda = -1$. L'équation (3) nous donne

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i = -\frac{dv_0}{dN}. \tag{12}$$

$$\left(\frac{du''}{dN}\right)_e = \frac{dv_0}{dN}. \tag{13}$$

Soit d'abord $\mu > 0$. Les équations précédentes entraîneront alors les relations

$$(u')_i = -(v_0)_i, \tag{14}$$

$$(u'')_e = (v_0)_e. \tag{15}$$

On déduit, à l'aide de ces relations, de l'équation (11), la conséquence suivante : aucun des nombres $+1$ et -1 n'est un pôle de la fonction $(v')_i + (v')_e$.

Soit maintenant $\mu = 0$. L'équation (13) entraînera bien l'équation (15), mais l'équation (14) ne sera plus une conséquence néces-

saire de l'équation (12); on pourra seulement affirmer que

$$(u')_s = -(v_0)_i + C,$$

où C est une constante. Donc, si l'on a $\mu = 0$, l'équation (11) nous apprend que la fonction $(v')_i + (v')_e$ ne pourra pas, il est vrai, avoir le nombre -1 pour pôle, mais qu'elle peut bien avoir pour pôle le nombre $+1$.

Il est aisé de déduire de tout ce qui précède que l'équation (1) admet une solution analytique par rapport au paramètre λ et que cette solution jouit de toutes les propriétés énoncées dans l'Introduction. Pour reconnaître qu'il en est bien ainsi, il suffit de se reporter à l'équation (11) et à l'équation (10), équations qui donnent

$$v' = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \{\lambda[(v')_i + (v')_e] + 2\varphi\} \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds.$$

Bien entendu, tout cela ne concerne que le cas où la fonction v_0, définie par la formule (2), possède la dérivée $\frac{dv_0}{dN}$ et où cette dérivée est continue.

17. Abordons maintenant le cas où la fonction φ est une fonction continue quelconque définie sur la surface (S). Posons, comme tout à l'heure,

$$v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \varphi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds,$$

et considérons, en outre, les fonctions v_1 et v_2 définies par les équations

$$(16)\qquad \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{(S)} [(v_0)_i + (v_0)_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds, \\ v_2 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{(S)} [(v_1)_i + (v_1)_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds. \end{cases}$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\varpi_0 = (v_0)_i + (v_0)_e,$$
$$\varpi_1 = (v_1)_i + (v_1)_e.$$

M. Liapounoff [1] a prouvé, en supposant que $\mu = 0$, qu'il existera un certain nombre positif A tel que la différence des valeurs ϖ_0', ϖ_0'' de la fonction ϖ_0 en deux points M et M' de la surface (S) vérifie l'inégalité

$$(17) \qquad |\varpi_0' - \varpi_0''| < A\sqrt{MM'}.$$

M. Korn [2], toujours dans l'hypothèse $\mu = 0$, en a tiré les conséquences suivantes :

1° La fonction ϖ_1 admettra sur la surface (S) des dérivées premières et ces dérivées premières jouiront d'une propriété exprimable par une inégalité analogue à l'inégalité (17).

2° La fonction v_2 possédera la dérivée $\frac{dv_2}{dN}$ et cette dérivée sera continue.

Je dois faire remarquer que M. Korn a considéré une surface un peu moins générale que la surface (S) que nous envisageons ici; cependant son théorème reste exact, même dans ces conditions plus générales et, au surplus, on peut l'étendre au cas où le nombre μ a une valeur positive quelconque. La démonstration de ces propositions ne présente aucune difficulté.

Cela étant, posons

$$(18) \qquad v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 w$$

et observons que l'on a

$$(v_0)_i - (v_0)_e = 2\varrho,$$
$$(v_1)_i - (v_1)_e = (v_0)_i + (v_0)_e;$$

l'équation (1) nous donnera

$$(w)_i - (w)_e = \lambda[(w)_i + (w)_e] + (v_1)_i + (v_1)_e.$$

---

[1] *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1898).

[2] Korn, *Ein allgemeiner Beweis des Methoden der alternirenden Verfahrens und der Existenz des Lösungen der Dirichletschen Problemes im Raume*.

Peut-on satisfaire à cette équation en prenant pour w un certain potentiel généralisé de double couche? Dans ce problème, la fonction v_2, définie par la formule (16), jouera le rôle qu'a joué la fonction v_0 au numéro précédent. Nous savons, par le théorème de M. Korn, que la dérivée $\frac{dv_2}{dN}$ est une fonction continue, donc la théorie du numéro précédent est applicable à la fonction w.

Cela posé, on tire de l'équation (18) la conséquence suivante : Il suffit que la fonction φ soit continue [1] pour que l'équation (1) admette une solution analytique par rapport à λ, jouissant de toutes les propriétés énoncées dans l'Introduction.

18. L'équation (1) admet-elle, outre la solution analytique considérée dans les numéros précédents, une autre solution v'? Posons, pour répondre à cette question,

$$\Phi = v - v'.$$

La fonction Φ sera un potentiel de double couche vérifiant la relation

$$(19) \qquad (\Phi)_i - (\Phi)_e = \lambda[(\Phi)_i + (\Phi)_e]$$

et l'on aura

$$(20) \qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \varpi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds,$$

où ϖ est une certaine fonction continue définie sur la surface (S).

Nous avons

$$(\Phi)_i - (\Phi)_e = \varpi,$$

---

[1] En généralisant un peu une remarque due à M. Korn (*Lehrbuch der Potentialtheorie*), il serait aisé d'étendre les résultats de ce Chapitre et ceux du Chapitre précédent à des cas où la fonction φ aurait des points de discontinuité ou même des lignes de discontinuité.

d'où, en tenant compte des équations (19) et (20),

$$(21)\qquad \Phi = \frac{\lambda}{4\pi}\int_S [(\Phi)_i + (\Phi)_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds.$$

Cela prouve que, pour $\lambda = 0$, la fonction Φ est identiquement nulle. Supposons que $\lambda \neq 0$ et reprenons les fonctions c_0, c_1, c_2 considérées au début du numéro précédent en ayant soin de substituer dans l'expression de la fonction c_0 à la fonction φ la fonction $\frac{1}{2}[(\Phi)_i + (\Phi)_e]$. Il résulte de l'équation (21) que la fonction c_2 coïncidera alors avec la fonction

$$\frac{1}{\lambda^2}\Phi.$$

Or, nous savons que l'expression $\frac{dc_2}{dN}$ a un sens et qu'elle est une fonction continue.

Il faut donc que la dérivée $\frac{d\Phi}{dN}$ existe et qu'elle soit une fonction continue.

Cela posé, j'observe que la relation (19) ne peut subsister pour

$$\lambda = -1,$$

sans que l'on ait identiquement $(\Phi) = 0$. En effet on aura, pour $\lambda = -1$,

$$(\Phi)_i = 0;$$

la fonction Φ serait donc nulle dans toute l'étendue du domaine (D) et l'on aurait $\frac{d\Phi}{dN} = 0$. On conclura aisément de là, en tenant compte des propriétés de la fonction Φ et de ses dérivées premières à l'infini, que la relation $\Phi = 0$ sera aussi vérifiée dans tout le domaine extérieur à la surface (S). Donc, pour $\lambda = -1$, on aura bien dans tout l'espace $\Phi = 0$.

Envisageons maintenant le cas où $\lambda = 1$. On s'assurera aisément qu'ici encore l'on aura dans tout l'espace $\Phi = 0$, à moins cependant que l'on n'ait $\mu = 0$. Dans ce dernier cas, la fonction Φ serait nulle à

l'extérieur de la surface (S) et conserverait une valeur constante à l'intérieur.

Supposons enfin que λ ne soit égal ni à $+1$ ni à -1, ni à zéro, et posons

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{d\Phi}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

On trouve, au moyen du théorème de Green, en s'appuyant sur l'équation (19),

$$(F)_s = \frac{1-\lambda}{2\lambda} (\Phi)_i = \frac{1+\lambda}{2\lambda} (\Phi)_e.$$

On aura donc, à l'intérieur de la surface (S),

$$\Phi = \frac{2\lambda}{1-\lambda} F,$$

et à l'extérieur,

$$\Phi = \frac{2\lambda}{1+\lambda} F.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = \frac{d\Phi}{dN};$$

par conséquent,

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_i (1+\lambda) = \left(\frac{dF}{dN}\right)_e (1-\lambda).$$

Voici ce qui résulte de tout ce qui a été dit dans ce numéro : si la fonction Φ n'est pas nulle identiquement, elle rentre dans la classe de celles parmi lesquelles se trouvent les résidus relatifs aux pôles de la solution analytique déduite plus haut de l'équation (1). Cela étant, tout ce qui a été dit dans l'Introduction au sujet de l'équation

$$(v)_i - (v)_e = \lambda [(v)_i + (v)_e] + 2\xi$$

se trouve être démontré.

19. Les résultats établis dans les numéros précédents conduisent à une généralisation de la méthode de Neumann et à une démonstration

générale de la légitimité de cette méthode elle-même, et cela sans supposer que le principe de Dirichlet ait été préalablement démontré.

Il résulte immédiatement, de ce que nous avons vu plus haut, que le potentiel généralisé v, fonction analytique du paramètre λ, définie par l'équation (1), est développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives de λ, série qui sera uniformément convergente dans tout l'espace, pourvu que

$$|\lambda| < R, \tag{22}$$

où la longueur R, rayon de convergence de la série, est supérieure à l'unité si l'on a

$$\mu > 0, \tag{23}$$

et au moins égale à l'unité si

$$\mu = 0. \tag{24}$$

Par conséquent, l'inégalité (22) étant vérifiée, nous pouvons poser

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \lambda^k. \tag{25}$$

Il vient, en portant cette valeur de v dans l'équation (1).

$$\left\{\begin{aligned} &(v_0)_i - (v_0)_e = 2\varphi, \\ &(v_k)_i - (v_k)_e = (v_{k-1})_e + (v_{k-1})_i \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots); \end{aligned}\right. \tag{26}$$

d'où

$$v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_s \varphi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds,$$

$$v_k = \frac{1}{4\pi}\int_s \left[(v_{k-1})_i + (v_{k-1})_e\right]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds.$$

Ces formules feront connaître de proche en proche tous les termes de la série (25). D'ailleurs, cette série ne se distingue de la série de

Neumann que par la substitution de potentiels généralisés aux potentiels newtoniens ordinaires.

Supposons d'abord que l'inégalité (23) soit vérifiée. Le rayon de convergence de la série (25) sera supérieur à l'unité, donc elle convergera uniformément dans tout l'espace tant pour $\lambda = +1$ que pour $\lambda = -1$. Dans le premier cas, elle fournira la solution du problème de Dirichlet généralisé extérieur et dans le second, elle donnera celle du problème intérieur.

Examinons maintenant le cas où $\mu = 0$.

Si le nombre $+1$ n'est pas un pôle de la fonction v, la série (25) aura un rayon de convergence supérieur à l'unité et tout ce que nous avons dit au sujet du cas où μ est un nombre positif différent de zéro est applicable au cas actuel. Il faut donc examiner l'hypothèse où le nombre $+1$ serait un pôle de la fonction v.

Le résidu relatif à ce pôle sera un potentiel de double couche; c'est là, nous l'avons vu, une propriété commune à tous les pôles de la fonction v. La densité de cette double couche sera une constante $\frac{c}{4\pi}$; la manière la plus simple de le reconnaître consiste à se reporter à ce que nous avons dit au sujet de l'équation (19) lorsque $\lambda = +1$.

Il résulte de tout cela que nous pouvons poser

$$(27) \qquad v = \frac{-c}{4\pi(1-\lambda)} \int_{S_0} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds + \sum_{k=0}^{\infty} v'_k \lambda^k,$$

où la série

$$(28) \qquad v' = \sum_{k=0} v'_k \lambda^k$$

aura un rayon de convergence supérieur à l'unité. L'équation (27) nous donne

$$(v)_i - (v)_e = -\frac{c}{1-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} [(v'_k)_i - (v'_k)_e] \lambda^k.$$

La comparaison de cette valeur de la différence

$$(v)_i - (v)_e$$

avec celle que donne la formule (25) conduit aux relations

$$(v_k)_i - (v_k)_e = (v_k)_i - (v_k)_e + c \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'où, en s'appuyant sur les équations (26),

$$(29) \qquad (v'_k)_i - (v'_k)_e = (v_{k-1})_i + (v_{k-1})_e + c:$$

Le rayon de convergence de la série (28) étant supérieur à l'unité, le premier membre de l'équation précédente tend vers zéro lorsque le nombre k croît indéfiniment. Il doit donc en être de même du second membre. Par conséquent

$$(30) \qquad c = -\lim[(v_k)_i + (v_k)_e]_{k=\infty}.$$

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction v admette le nombre $+1$ pour pôle peut s'écrire ainsi :

$$(31) \qquad \lim[(v_k)_i + (v_k)_e]_{k=\infty} \neq 0.$$

Si la fonction v a le nombre $+1$ pour pôle, la relation (30) nous fera connaître la constante c. Cette constante étant déterminée, il sera aisé de calculer successivement tous les termes de la série (28). En effet, l'équation (29) nous donne

$$v_k = \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}[(v_{k-1})_i + (v_{k-1})_e + c]\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds;$$

d'où

$$v'_k = v_k + \frac{c}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds;$$

on a donc, à l'intérieur de la surface (S),

$$v'_k = v_k + c,$$

et, à l'extérieur,

$$v'_k = v_k.$$

En résumé, tous les éléments entrant dans la formule (27) peuvent être aisément calculés. Si l'on pose, dans cette formule, $\lambda = -1$, on obtient la solution générale du problème de Dirichlet intérieur, sous forme d'un potentiel de double couche.

La formule (27) n'a pas de sens pour $\lambda = +1$; il est aisé, cependant, de déduire, des résultats que nous avons obtenus, la solution du problème de Dirichlet extérieur. En effet, le Chapitre précédent nous apprend qu'il existe un potentiel de simple couche P, prenant la valeur $+1$ sur la surface (S). D'autre part, on vérifiera sans peine que, pour $\lambda = +1$, la fonction v', définie par la série (28), vérifie l'équation

$$(v')_e = -\frac{c}{2} - \varphi.$$

Par conséquent, la fonction

$$-\frac{c}{2}P - v'$$

résoudra le problème de Dirichlet extérieur, sous forme de la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche. J'ajoute que, dans le cas actuel, c'est-à-dire où l'inégalité (31) est vérifiée, il est impossible de résoudre le problème extérieur par un potentiel de double couche. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un potentiel de double couche F, coïncidant avec la fonction P à l'extérieur de la surface (S), et l'on aurait

$$\frac{dF}{dN} = \left(\frac{dP}{dN}\right)_e.$$

Or, cela est impossible parce que l'on a, d'une part,

$$\int_S \left(\frac{dP}{dN}\right)_e ds \neq 0,$$

et, d'autre part,

$$\int_{(S)} \left(\frac{dF}{dN}\right) ds = 0.$$

20. En terminant ce Chapitre, nous nous proposons de montrer comment la théorie générale de l'équation

$$\Delta w - \mu^2 w = 0 \tag{32}$$

peut être complétée en s'appuyant sur les résultats que nous avons établis. Supposons qu'une intégrale w de l'équation (32) vérifie cette équation dans toute l'étendue du domaine (D) extérieur à une surface fermée quelconque (Σ) et qu'elle s'annule à l'infini.

Posons

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et considérons les rapports

$$w : \frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial z} : \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho};$$

je me propose de montrer que les rapports précédents restent finis lorsque le nombre ρ croît indéfiniment. J'envisage, à cet effet, une surface fermée ayant les propriétés voulues pour que les considérations des numéros précédents lui soient applicables et telle que la surface (Σ) soit tout entière située à l'intérieur de la surface en question; cette surface pourra être, par exemple, une sphère (S), de rayon assez grand, ayant l'origine des coordonnées pour centre. A l'extérieur de la sphère (S), la fonction w sera déterminée sans ambiguïté par les valeurs qu'elle prend sur cette sphère elle-même; cela résulte de ce qu'une intégrale de l'équation (32) ne peut avoir ni un maximum positif ni un minimum négatif à l'intérieur du domaine où elle vérifie cette équation. Il résulte de là et de ce que nous avons vu dans les numéros précédents que, à l'extérieur de la surface (S), la fonction w pourra être mise sous forme d'un potentiel généralisé de double couche répandue sur cette surface, ou, si $\mu = 0$, sous forme de somme d'un potentiel de double couche et d'un potentiel de simple couche.

Or, le théorème qui nous occupe est une conséquence immédiate de cette remarque.

Le théorème précédent permet de démontrer rigoureusement le théorème suivant, qui n'est pas sans intérêt.

Soit, comme dans les numéros précédents, (S) *une surface fermée jouissant des propriétés énoncées dans l'Introduction et* (D) *le domaine extérieur à cette surface. La fonction w sera déterminée sans ambiguïté dans toute l'étendue du domaine* (D) *par les propriétés suivantes :*

1° *Elle doit vérifier l'équation* (32) *dans tout ce domaine;*

2° *Elle s'annule à l'infini;*

3° *Elle satisfait à l'équation*

$$\left(\frac{dw}{dN}\right)_e = \zeta,$$

où ζ est une fonction continue définie sur la surface (S).

En effet, supposons que deux fonctions différentes puissent remplir chacune les conditions précédentes, et soit Φ leur différence. La fonction Φ jouirait des deux premières propriétés de la fonction w et satisferait en outre à l'équation

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = 0.$$

On déduit de là, en s'appuyant sur le théorème démontré au début de ce numéro, que

$$\int\int\int_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\Phi^2\right] dx\,dy\,dz = 0,$$

égalité qui ne peut subsister que sous la condition

$$\Phi = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D). Cela prouve bien que la fonction w est déterminée sans ambiguïté par les conditions qui lui sont imposées.

Cracovie, le 19 juin 1901.

Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR,
Docteur ès Sciences.

M. Appell, à la fin de son Mémoire couronné *Sur les fonctions à multiplicateurs constants* (*Acta Mathematica*, t. XIII), fait quelques remarques sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, dont l'intégrale générale peut cesser d'être uniforme sur la surface de Riemann correspondant à une relation algébrique donnée, en deux sortes de points : les points où certains des coefficients de l'équation deviennent infinis, et les points de ramification de la surface. Dans le domaine de chaque point critique il suppose que l'intégrale générale reste finie quand on l'a préalablement multipliée par une puissance convenable de $z-\alpha$ si α est un point critique ordinaire, ou par une puissance convenable de $\zeta-\gamma$, après avoir fait dans l'équation le changement $z-\alpha=(\zeta-\gamma)^m$, si α est un point de ramification et m l'ordre du point de ramification; il suppose de plus que l'équation fondamentale déterminante de M. Fuchs correspondant à ces points n'a que des racines entières. M. Appell classifie ces équations en trois espèces et il appelle *équations de première espèce* celles dont l'intégrale générale est partout finie, *de seconde espèce* celles dont l'intégrale générale n'a que des pôles et enfin *de troisième espèce* celles dont l'intégrale générale a des points critiques logarithmiques.

Je me propose, dans ce Mémoire, de former les équations dites *de première espèce*, en me bornant aux équations du second ordre et en supposant de plus que la surface de Riemann est hyperelliptique. Je dois cependant rappeler que, au moment où je me suis occupé de ce travail, il m'a été signalé par M. Appell qu'un travail sur le même sujet et signé par M. G. Vitali allait paraître dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XVI. J'ai pris connaissance d'un tirage à part de ce travail qui m'a été communiqué par mon maître M. Appell.

M. Vitali, dans son Mémoire, part de deux équations différentielles linéaires de second ordre, à coefficients algébriques, ayant le même groupe [1]; il forme le déterminant

$$y_1 t_2 - y_2 t_1$$

où y_1, y_2, t_1, t_2 sont les intégrales de deux équations formant un système fondamental; il suppose le groupe de deux équations tel que le déterminant précédent soit une fonction spéciale à multiplicateurs de M. Appell, ou bien soit nul. Les hypothèses que M. Vitali fait le conduisent à des types spéciaux des équations. J'ai cru être utile en poursuivant mes recherches commencées sans que mon travail soit une réédition de celui de M. Vitali.

1. Soit

$$s = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_{2p+2})} \tag{1}$$

la relation algébrique donnée entre s et z et p le genre de la surface de Riemann correspondante.

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dz^2} = p_1 \frac{dy}{dz} + p_2 y, \tag{2}$$

où p_1 et p_2 sont deux fonctions rationnelles de z et de s.

Supposons que cette équation soit de première espèce et soient y_1

---

[1] *Voir*, pour la définition du groupe, APPELL, *loc. cit.*, p. 168.

et y_2 deux intégrales de l'équation donnée formant un système fondamental. Désignons par y'_1 et y'_2 les dérivées par rapport à z de y_1 et y_2 et posons

$$(3) \qquad D = y_1 y'_2 - y_2 y'_1;$$

nous aurons

$$(4) \qquad D = Ce^{\int p_1 dz},$$

où C est une constante; on aura encore

$$(5) \qquad p_2 = \frac{y'_2 y''_1 - y'_1 y''_2}{D},$$

où y''_1, y''_2 sont les secondes dérivées de y_1 et y_2.

Les deux intégrales y_1 et y_2 étant de première espèce, leurs dérivées y'_1 et y'_2 ne deviendront infinies qu'aux points de ramification de la surface, et cela comme une puissance inférieure à l'unité, et au point à l'infini elles deviendront infiniment petites comme $\frac{1}{z^2}$.

Le déterminant D jouira évidemment des mêmes propriétés que y'_1 et y'_2; c'est-à-dire que si l'on pose

$$z - a_i = (\zeta - \gamma_i)^2,$$

et si l'on multiplie D par une puissance convenable de $(\zeta - \gamma_i)$, il restera fini au point considéré; il résulte alors que le déterminant D sera une fonction à multiplicateurs de M. Appell.

Si nous désignons par $u'(z)$ la dérivée d'une intégrale abélienne $u(z)$ de première espèce, le rapport

$$(6) \qquad \frac{e^{\int p_1 dz}}{u'(z)}$$

sera encore une fonction aux mêmes multiplicateurs [1]; il reste fini

---

[1] Appell, *loc. cit.*, p. 22.

aux points de ramification et au point à l'infini, il devient infini aux zéros de $u'(z)$ en nombre de $2p-2$ dont $p-1$ sont dans un feuillet et les $p-1$ autres sont les superposés des premiers.

Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p-2}$$

les zéros de $u'(z)$ et

$$\Pi_{\alpha_i \beta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p-2)$$

une intégrale normale abélienne de troisième espèce, devenant infinie au point α_i comme $-\log(z-\alpha_i)$ et au point β_i comme $\log(z-\beta_i)$. Nous aurons alors

$$(7) \qquad D = C u'(z) e^{\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i \beta_i} - 2u_1(z)},$$

où nous avons posé

$$u_1(z) = \mu_1 u^{(1)}(z) + \mu_2 u^{(2)}(z) + \ldots + \mu_p u^{(p)}(z)$$

et où

$$u^{(1)}(z), \quad u^{(2)}(z), \quad \ldots, \quad u^{(p)}(z)$$

sont les p intégrales abéliennes normales de première espèce.

Il peut se faire que le déterminant D soit une fonction spéciale de M. Appell; nous sommes alors amenés à partager les équations en deux groupes, et nous dirons simplement qu'une équation est de première espèce si le déterminant D est une fonction quelconque à multiplicateurs, et l'équation sera dite *de forme spéciale* si le déterminant D est une fonction spéciale à multiplicateurs.

Remarquons encore que si, dans l'équation, on fait le changement

$$y = Y e^{-u_1(z)},$$

$e^{-u_1(z)}$ étant une fonction spéciale de M. Appell, l'équation en Y aura

pour déterminant

$$Cu'(z)e^{\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i \beta_i}},$$

ou bien

$$Cu'(z),$$

si elle était de forme spéciale; nous dirons alors que l'équation transformée est *de première espèce et de forme réduite* ou bien *spéciale et de forme réduite.*

2. Nous sommes maintenant en mesure de voir comment se comporte p_1 sur toute la surface. En effet, la formule (7) nous montre que p_1 ne peut avoir que des pôles de premier ordre qui sont tous à distance finie. En chaque point de ramification, le résidu doit être négatif et égal à -1, de sorte que, dans le domaine d'un point de ramification, p_1 sera de la forme

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_k}+\frac{a_{-1}^k}{(z-a_k)^{\frac{1}{2}}}+a_0^{\prime k}+a_1^{\prime k}(z-a_k)+\ldots$$
$$(k=1,2,\ldots,2p+2),$$

tandis que, dans le domaine des autres points ordinaires qui sont des pôles pour p_1, les résidus doivent être entiers et positifs, et la somme de ces résidus sera égale à $2p-2$. Enfin, dans le domaine du point à l'infini, p_1 sera de la forme

$$-\frac{2}{z}+\frac{b_2^l}{z^2}+\frac{b_3^l}{z^3}+\ldots \qquad (l=1,2).$$

3. D'après ce qui précède il nous sera facile de reconnaître si une équation donnée de première espèce est de forme spéciale ou encore de la forme réduite. En effet, la fonction à multiplicateurs

$$e^{\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i \beta_i}-2u_1(z)},$$

qui figure dans la formule (7) a pour zéros les points β_i et pour pôles les points α_i; or on sait que, entre ces zéros et ces pôles, il existe les

p relations suivantes [1] :

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=2p-2} |u'^k(\beta_i) - u'^k(\alpha_i)| \\ \qquad = \frac{1}{2}\log a_k - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(b_{1k}\log m_1 + \ldots + b_{pk}\log m_p) \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Si l'équation n'est pas spéciale, il faut avoir

$$\sum_{i=1}^{i=2p-2} |u'^k(\beta_i) - u'^k(\alpha_i)| \neq 0.$$

On remarque que, dans cette formule, les points α_i sont les zéros de $u'(z)$, où $p-1$ points sont les superposés des $p-1$ autres; donc l'inégalité précédente sera satisfaite si les points β sont en nombre impair, ou, s'ils sont en nombre pair, il faut que deux points au moins ne soient pas superposés. Si, au contraire, l'équation donnée est de forme spéciale, il faut que les points β soient en nombre pair, qu'ils puissent se partager en deux groupes tels que les points du premier groupe soient les superposés des points du second, et il faut de plus que les résidus de deux points quelconques qui sont superposés soient égaux : il est bien entendu, comme nous l'avons déjà dit plus haut, que le nombre de points β est au plus égal à $2p-2$. Si ces conditions sont remplies, l'équation sera de forme spéciale.

En prenant la dérivée logarithmique de (7) et en ayant égard à la formule (4), on trouve, en général,

$$(9)\qquad p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z) + \frac{d}{dz}\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{z,\beta_i} - 2u'_1(z),$$

et si l'équation est de la forme réduite, on aura

$$p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z) + \frac{d}{dz}\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{z,\beta_i}.$$

[1] Appell, *loc. cit.*, p. 13.

Dans le cas particulier où l'équation est de forme spéciale, on prendra pour p_1 la forme

$$(10) \qquad p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z) - 2u'_1(z),$$

pour éviter des points étrangers à la question; enfin, pour la forme spéciale réduite, on aura

$$p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z).$$

4. Il nous reste maintenant à chercher comment se comporte le second coefficient p_2 sur toute la surface. Nous allons apprendre d'abord comment il se comporte dans le domaine d'un point de ramification.

Nous laissons de côté le cas particulier où $p_2 = 0$; les équations admettent, comme l'a fait voir M. Appell [1], une intégrale qui est l'intégrale de première espèce d'une fonction à multiplicateurs constants. Faisons le changement de variable

$$(11) \qquad z - a_i = (\zeta - \gamma_i)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+2),$$

l'équation (2) se transforme en la suivante :

$$(12) \qquad \frac{d^2y}{d\zeta^2} = 2(\zeta - \gamma_i)\left[(p_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{(\zeta - \gamma_i)^2}\right]\frac{dy}{d\zeta} + 4(\zeta - \gamma_i)^2 p_2 y.$$

Le déterminant analogue à D de l'équation (12) sera de la forme

$$(13) \qquad y_1\frac{dy_2}{d\zeta} - y_2\frac{dy_1}{d\zeta} = \varphi(\zeta, s),$$

où φ est une fonction finie et différente de zéro au point considéré. Si nous désignons par r_1 et r_2 les exposants auxquels appartiennent les deux intégrales y_1, y_2 considérées comme fonctions de ζ, s et qui

---

[1] Appell, *loc. cit.*, p. 165.

forment un système fondamental : on sait que dans le domaine de ce point nous devons avoir [1]

$$y_1 \frac{dy_2}{d\zeta} - y_2 \frac{dy_1}{d\zeta} = (\zeta - \gamma_i)^{r_1 + r_2 - i} \psi(\zeta, s),$$

où la fonction ψ est finie et différente de zéro au même point; donc d'après (13) on doit avoir

$$r_1 + r_2 = 1.$$

Mais r_1 et r_2 sont les racines de l'équation fondamentale déterminante de M. Fuchs, correspondant à l'équation (12), et ces racines doivent être entières et positives; nous ne pourrons donc satisfaire qu'en posant

$$r_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_2 = 1.$$

Il résulte de là *que les deux intégrales qui forment un système fondamental de toute équation de second ordre, linéaire, à coefficients algébriques et de première espèce, appartiendront en chaque point de ramification de la surface, l'une à l'exposant zéro et l'autre à l'exposant un, après avoir fait dans l'équation le changement de variable donné par* (11).

Si nous nous rapportons à la formule (5), où nous ferons le changement de variable donné par (11), on trouve que p_2 dans le domaine de ce point sera de la forme

$$(14) \qquad \frac{A_{-2}}{(\zeta - \gamma_i)^2} + \frac{A_{-1}}{(\zeta - \gamma_i)} + A_0 + A_1(\zeta - \gamma_i) + \ldots,$$

ou bien encore

$$(15) \qquad \frac{A_{-2}}{(z - a_i)} + \frac{A_{-1}}{(z - a_i)^{\frac{1}{2}}} + A_0 + A_1(z - a_i)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Nous remarquons qu'il n'existe pas d'équation particulière où le premier coefficient A_{-2} soit nul. En effet, supposons que la proposition

---

[1] TANNERY, *Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables* (*Thèses*, 1874).

ne soit pas vraie et soit $A_{-2} = 0$. Nous avons vu que les deux intégrales y_1 et y_2, considérées comme fonctions de ζ et s, seront développées dans le domaine de ce point par les séries

$$(16)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{10} + c_{11}(\zeta - \gamma_i) + \Sigma c_{1k}(\zeta - \gamma_i)^k, \\ y_2 = c_{21}(\zeta - \gamma_i) + \Sigma c_{2k}(\zeta - \gamma_i)^k. \end{cases}$$

Dans la première série les coefficients c_{10} et c_{11} sont nécessairement différents de zéro et dans la seconde le coefficient c_{21} sera différent de zéro. Cela est évident pour les coefficients c_{10} et c_{21}, il en sera de même pour c_{11}, car la dérivée de y_1, considérée comme fonction de z, et s doit devenir au point a_i infinie comme une puissance inférieure à l'unité. Donc pour que A_{-2} soit nul, en se rapportant à la formule (5), il faut que le nombre k dans les deux séries (16) soit au moins égal à 3. L'équation (12) doit être satisfaite, en particulier, par la première série de (16); mais si l'on substitue cette série dans (12) et qu'on identifie, on trouve que c_{11} doit être nul, ce qui est impossible; donc on ne peut pas satisfaire par une pareille série; on en conclut alors qu'il n'existe pas d'équation particulière où le coefficient A_{-2} soit nul.

5. Nous venons de voir comment se comporte p_2 dans le domaine d'un point de ramification, voyons maintenant comment il se comporte dans le domaine d'un point ordinaire β. Supposons d'abord que p_1 a l'unité pour résidu dans le domaine de chaque point β; alors le déterminant D n'aura que des zéros simples à distance finie. Si nous désignons encore par r_1 et r_2 les racines de l'équation de M. Fuchs, nous aurons

$$r_1 + r_2 = 2,$$

où nous ne pouvons satisfaire qu'en posant

$$r_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_2 = 2.$$

Il résulte alors que, si p_1 devient infini en $2p - 2$ points ordinaires, l'équation admet, en ces $2p - 2$ points, deux intégrales qui forment un système fondamental, et l'une d'elles appartient à l'exposant zéro et l'autre à l'exposant 2. En nous rapportant à la formule (5), on trouve

que, dans le domaine de l'un de ces points β, p_2 sera de la forme

$$(17)\quad \frac{A_{-1}^{(i)}}{z-\beta_i} + A_0^{(i)} + A_1^{(i)}(z-\beta_i) + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p-2).$$

Supposons maintenant que le nombre des points β soit inférieur à $2p-2$, le coefficient p_1 deviendra alors infini en des points où le résidu correspondant est supérieur à 1. Soient β_i un de ces points et λ_i le résidu correspondant; le point β_i sera un zéro de D d'un ordre égal à λ_i; nous aurons alors, en appelant, comme tout à l'heure, r_1 et r_2 les racines de l'équation de M. Fuchs,

$$r_1 + r_2 = \lambda_i + 1,$$

ou

$$r_2 = (\lambda_i + 1) - r_1.$$

Le nombre r_1 peut recevoir toutes les valeurs entières

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda_i}{2},$$

si le nombre λ_i est pair, ou bien toutes les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda_i - 1}{2},$$

si λ_i est impair.

Nous aurons alors pour p_2 un développement de la forme

$$(18)\quad \frac{|(\lambda_i+1) - r_1|\, r_1}{(z-\beta_i)^2} + \frac{A_{-1}^{(i)}}{(z-\beta_i)} + A_0^{(i)} + A_1^{(i)}(z-\beta_i) + \ldots.$$

Dans le cas particulier où l'équation admet en tous les points β une intégrale qui appartient à l'exposant zéro, le coefficient p_2 aura un développement analogue à (17). Nous remarquons encore qu'il existe des équations où le coefficient p_2 reste fini dans le domaine d'un point β, puisque l'équation pourra être satisfaite par une intégrale de la forme

$$y_1 = e_{10} + \sum e_{1k}(z-\beta_i)^k,$$

où k est au moins égal à 3.

6. Nous avons appris comment p_2 se comporte sur toute la surface de Riemann à distance finie, il nous reste à examiner comment il se comporte au point à l'infini. Si l'on pose $z = \frac{1}{t}$ et qu'on forme le déterminant analogue à D de l'équation transformée, on trouve que ce déterminant reste fini et différent de zéro pour $t = 0$; donc, au point à l'infini, les deux intégrales qui forment un système fondamental appartiendront l'une à l'exposant zéro et l'autre à l'exposant 1. Le coefficient p_2 dans le domaine de ce point sera de la forme

$$A_4 t^4 + A_5 t^5 + \ldots,$$

ou

$$\frac{A_4}{z_4} + \frac{A_5}{z_5} + \ldots. \tag{19}$$

La remarque que nous avons faite sur les points de ramification s'applique aussi pour le point à l'infini et l'on trouve que le coefficient A_4 doit être nécessairement différent de zéro.

7. Nous savons maintenant comment se comporte p_2 sur toute la surface. Il nous sera facile de le former.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où p_2 aura, dans le domaine des points β, un développement de la forme (17). Considérons alors la différence

$$p_2 - u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i M_i \Pi_{\alpha_i \beta_i}, \tag{20}$$

où $u'(z)$ est la dérivée de l'intégrale $u(z)$, abélienne de première espèce, ayant les points α_i pour zéros; $\Pi_{\alpha_i \beta_i}$ est une intégrale normale de troisième espèce et M_i sont des constantes, l'indice i se rapportant à tous les points β.

Nous pouvons disposer des constantes M_i pour que l'expression précédente reste finie en tous les points β, elle ne deviendra alors infinie qu'aux points de ramification, et cela de la manière que nous l'avons dit; enfin, à l'infini, elle devient infiniment petite comme $\frac{1}{z^3}$. Nous remarquons alors que cette expression a, à distance finie, $4p - 4$ zéros, et il est facile de s'assurer que ces zéros ne sont pas

arbitraires; ils se partagent, en effet, en deux groupes de points de $2p-2$ points et tels que les points du premier groupe sont les superposés des points du second.

Nous pouvons alors former deux intégrales abéliennes de première espèce $u_2(z)$ et $u_3(z)$, telles que les dérivées aient pour zéros les $4p-4$ zéros de l'expression (20); elle ne différera du produit $u'_2(z)\,u'_3(z)$ que par une constante C.

Nous aurons alors

$$(21)\qquad p_2 = u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i M_i\,\Pi_{\alpha,\beta_i} + C u'_2(z)u'_3(z).$$

Admettons maintenant qu'il y ait des points β où p_2 ait un développement de la forme (18). Soit alors

$$Z_{\beta_k}$$

une intégrale abélienne normale de seconde espèce, devenant, au point β_k, infinie comme

$$-\frac{1}{z-\beta_k} + C_0 + C_1(z-\beta_k) + \ldots;$$

désignons par Z'_{β_k} la dérivée de Z_{β_k} par rapport à z et considérons l'expression

$$(22)\qquad p_2 - u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i M_i\,\Pi_{\alpha,\beta_i} - u'(z)\sum_k \frac{|(\lambda_k+1)-r_1|\,r_1}{u'(\beta_k)} Z'_{\beta_k},$$

où l'indice k se rapporte aux points β pour lesquels p_2 a un développement de la forme (18), λ_k est le résidu correspondant à un de ces points β, enfin l'indice i se rapporte aux points où p_2 a un développement de la forme (17) et aux points qui proviennent de l'indice k.

Nous pouvons encore disposer des constantes M_i pour que l'expression (22) soit finie en tous les points β, elle ne deviendra plus infinie qu'aux points de ramification de la manière montrée plus haut, et à l'infini, infiniment petite comme $\frac{1}{z^5}$. L'expression (22) ne différera alors

du produit $u'_2(z)\,u'_3(z)$ que par une constante; nous aurons

$$p_2 = u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i M_i\,\Pi_{2,\beta_i}$$
$$- u'(z)\sum_k \frac{|(\lambda_k+1)-r_1|\,r_1}{u'(\beta_k)} Z'_{\beta_k} + C u'_2(z)\,u'_3(z).$$

8. Nous allons terminer par un cas particulier où nous montrerons qu'il existe des équations de première espèce dont les coefficients sont rationnels en z seulement.

Supposons que l'on veuille former une équation de forme spéciale qui jouisse des propriétés suivantes : en tous les points critiques ordinaires l'équation admet deux intégrales formant un système fondamental, dont l'une appartient à l'exposant zéro; de plus, en tous ces points, l'intégrale qui appartient à l'exposant zéro doit être de la forme

$$y_1 = c_{10} + \sum c_{1k}(z-\beta_k)^k,$$

où k est au moins égal à 3. Il en résulte, d'après ce que nous avons vu, que le coefficient p_2 sera fini en tous ces points critiques; donc p_2 ne deviendra infini à distance finie qu'aux points de ramification et à l'infini infiniment petit comme $\frac{1}{z^4}$; donc p_2 ne différera du produit $u'_2(z)\,u'_3(z)$ que par une constante; donc p_2 sera une fonction rationnelle de z seulement. Supposons, en particulier, que l'équation soit non seulement de forme spéciale, mais encore de forme réduite; alors le coefficient p_1 est aussi rationnel en z seulement; il sera de la forme

$$p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z),$$

et l'équation cherchée sera

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dz}\log u'(z)\,\frac{dy}{dz} + C u'_2(z)\,u'_3(z)\,y.$$

Remarquons encore que, si le genre de la surface est 1, toutes les

équations de première espèce seront de la forme spéciale ou de la forme réduite. En effet, la dérivée d'une intégrale abélienne de première espèce est sans zéro à distance finie, donc p_2 sera rationnelle en z et de la forme

$$p_2 = Cu'^2(z),$$

et l'équation la plus générale appartenant au genre 1 sera

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left[\frac{d}{dz}\log u'(z) + Au'(z)\right]\frac{dy}{dz} + Cu'^2(z)y.$$

9. Dans les numéros précédents, nous avons appris comment doivent être les coefficients d'une équation pour qu'elle soit de première espèce. Dans ce dernier numéro, nous allons démontrer une proposition concernant les équations qui ont un même groupe, donné d'avance (¹). Nous remarquons que, si l'on impose à une équation d'être de première espèce et d'avoir un groupe donné, la forme générale des coefficients de l'équation ne sera pas modifiée. En effet, connaissant le groupe de l'équation, on connaît aussi les multiplicateurs du déterminant D; alors la seule différence qui existera c'est que les zéros de D ne sont plus arbitraires; parmi ces points, qui sont des zéros de D, il y aura $p-2$ points arbitraires; dès qu'on connaît les points α_i qui sont les zéros de $u'(z)$, les p autres points dépendront de tous ces points ainsi que du groupe de l'équation. On remarque encore qu'il n'y a aucun changement à apporter si le groupe de l'équation est tel que l'équation correspondante soit de forme spéciale, car les zéros de D forment alors, comme nous l'avons dit au début, un groupe spécial.

Revenons maintenant à la proposition que nous avons en vue.

Je dis qu'il existe $p-1$ équations simplement de première espèce ayant un même groupe et qui sont linéairement indépendantes, et p dans le cas où elles sont de formes spéciales ou de formes spéciales et réduites.

Nous dirons que k équations ayant un même groupe donné sont

(¹) APPELL, *loc. cit.*, p. 168.

linéairement indépendantes s'il n'existe aucun système de constantes pour lesquelles on puisse avoir

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k = 0,$$

où

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_k$$

sont des intégrales de k équations.

Soient alors

$$y_{1i}, \quad y_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

deux intégrales formant un système fondamental d'un groupe de $p-1$ équations. Désignons par

$$p_{11}, \quad p_{12}, \quad \ldots, \quad p_{1\,p-1}$$

les coefficients de $\frac{dy}{dz}$ de ces $p-1$ équations. Le groupe de ces équations étant donné, nous savons que ces coefficients deviennent infinis en $p-2$ points arbitraires. Soient

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{p-2}$$

les infinis arbitraires du coefficient p_{11}, et supposons qu'aucun de ces points ne rende infinis les autres coefficients. Supposons encore qu'il existe un système de constantes telles que l'on puisse avoir

$$c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \ldots + c_{p-1} y_{1\,p-1} = 0,$$
$$c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + \ldots + c_{p-1} y_{2\,p-1} = 0;$$

des conditions imposées aux points β il résulte que les deux intégrales y_{11} et y_{21} de la première équation appartiendront aux exposants 0 et 2 et les intégrales des autres équations appartiendront aux exposants 0 et 1 dans le domaine de tous ces points β; admettons que les intégrales dont le premier indice est 1 appartiennent à l'exposant

zéro. Nous aurons alors

$$c_1 \frac{d}{dz} Y_{21} + c_2 \frac{d}{dz} Y_{22} + \ldots + c_{p-1} \frac{d}{dz} Y_{2p-1} = 0.$$

Si dans cette relation nous remplaçons z par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-2}$, nous aurons les $p-2$ équations linéaires et homogènes

$$c_2 \left| \frac{d}{dz} Y_{22} \right|_{\beta_i} + c_3 \left| \frac{d}{dz} Y_{23} \right|_{\beta_i} + \ldots + c_{p-1} \left| \frac{d}{dz} Y_{2p-1} \right|_{\beta_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p-2),$$

et, comme leur déterminant est différent de zéro, sans quoi il établirait une relation entre les $p-2$ points β qui sont arbitraires, on aura alors

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_{p-1} = 0.$$

Un raisonnement analogue nous conduirait à p équations linéairement indépendantes si les équations étaient de formes spéciales.

La même proposition pourra encore être établie comme il suit.

Il est évident que deux systèmes d'équations simplement de première espèce ou de formes spéciales ayant deux groupes différents auront le même nombre d'équations linéairement indépendantes. Il est encore évident que ce nombre sera le même, quelles que soient les valeurs que l'on donnera aux coefficients arbitraires qui figurent dans le coefficient p_2 de ces équations. Nous pouvons alors disposer du groupe ainsi que des coefficients arbitraires, pour que les coefficients p_2 dans les équations du second système soient nuls sans que ces équations changent de type. Le nombre des équations linéairement indépendantes du premier système sera le même que celui du second système. Or ce dernier système a pour intégrales des intégrales de fonctions à multiplicateurs de première espèce, et l'on sait que le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes est $p-1$ ou p [1], selon que les équations sont simplement de première espèce ou de formes spéciales.

Paris, 25 août 1901.

---

[1] APPELL, *loc. cit.*, p. 25.

Sur l'hexacoryphe (¹) *complet;*

PAR M. ARISTIDE ZOURIS.

Dans le présent Travail nous nous occupons de l'hexacoryphe complet. En considérant les quinze arêtes de l'hexacoryphe et les quinze surfaces du second degré S^2 ayant pour directrices trois de ces droites, nous démontrons diverses propriétés de ces surfaces et, entre autres, cette propriété remarquable que ces surfaces, prises trois à trois de vingt manières différentes, passent par une même biquadratique. Ces vingt biquadratiques se rangent en dix couples et les courbes de chacun de ces couples constituent le lieu géométrique des points dont on peut projeter, sur un plan quelconque, comme trois fois homologues dans l'un ou l'autre de deux manières possibles, les deux triangles d'un des dix couples, qui, ayant pour sommets les six sommets de l'hexacoryphe, se trouvent situés sur deux de ces faces opposées.

En considérant ensuite les quarante-cinq cubiques suivant lesquelles se coupent, deux à deux, les quinze surfaces S^2, quand elles ont une directrice commune, nous sommes amenés à la considération de quarante-cinq nouvelles surfaces Σ^2 du second degré formant entre elles et avec les quinze surfaces S^2 certaines configurations remarquables.

Les équations des quinze surfaces S^2 et des quarante-cinq surfaces Σ^2

(¹) ἕξ ≡ six, κορυφή ≡ sommet.

sont données au moyen des dix polynomes du second degré qui, égalés à zéro, représentent les divers couples des faces opposées de l'hexacoryphe. Ces dix polynomes sont liés entre eux par certaines identités dont l'importance est capitale pour l'étude que nous faisons [1].

Enfin nous considérons quelques surfaces du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe et qui font une configuration semblable à celle des couples des faces opposées de l'hexacoryphe des surfaces S^2 et des surfaces Σ^2.

Quelques-unes de ces surfaces ont, parmi d'autres propriétés, celle d'avoir leurs points associés en couples. Les droites déterminées par ces couples de points rencontrent toutes suivant deux points la cubique déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe. Cette propriété établie, nous trouvons diverses distributions des droites de cette congruence en génératrices de surfaces du deuxième, du quatrième, jusqu'au dix-huitième degré.

I.

1. Soient dans l'espace 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six sommets d'un hexacoryphe complet et D_{12}, D_{13}, ... les quinze droites qui joignent ces sommets deux à deux. Trois droites D_{ij}, D_{kl}, D_{mn} n'ayant aucun indice commun déterminent un hyperboloïde $S^2_{ij.kl.mn}$ contenant ces droites. Il y a en tout quinze surfaces pareilles.

Les quinze droites D peuvent se ranger en six pentades (groupes de cinq) 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont chacune contient les cinq droites qui passent par un même sommet de l'hexacoryphe.

Chaque surface $S^2_{ij.kl.mn}$ contient une droite de chacune de ces pentades.

De même les quinze surfaces $S^2_{ij.kl.mn}$ se rangent en six pentades telles que les surfaces de chaque pentade passent par toutes les quinze droites D.

[1] Des identités analogues existent entre les polynomes qui, égalés à zéro, représentent les couples des faces opposés à $n-1$ dimensions de la figure complète ayant pour sommets $2n$ points d'un espace à n dimensions.

Nous désignons ces pentades par les indices I, II, III, IV, V, VI. Chacune des quinze surfaces $S^2_{ij,kl,mn}$ appartient à deux pentades et peut être aussi représentée par le couple d'indices de ces deux pentades.

Nous aurons ainsi :

I.	II.	III.
$S^2_{\mathrm{I\,II}} \equiv S^2_{12,34,56}$	$S^2_{\mathrm{I\,III}} \equiv S^2_{12,34,56}$	$S^2_{\mathrm{I\,III}} \equiv S^2_{13,25,46}$
$S^2_{\mathrm{I\,III}} \equiv S^2_{13,25,46}$	$S^2_{\mathrm{II\,III}} \equiv S^2_{16,24,35}$	$S^2_{\mathrm{II\,III}} \equiv S^2_{16,24,35}$
$S^2_{\mathrm{I\,IV}} \equiv S^2_{14,26,35}$	$S^2_{\mathrm{II\,IV}} \equiv S^2_{15,23,46}$	$S^2_{\mathrm{III\,IV}} \equiv S^2_{12,36,45}$
$S^2_{\mathrm{I\,V}} \equiv S^2_{15,24,36}$	$S^2_{\mathrm{II\,V}} \equiv S^2_{13,26,45}$	$S^2_{\mathrm{II\,V}} \equiv S^2_{14,23,56}$
$S^2_{\mathrm{I\,VI}} \equiv S^2_{16,23,45}$	$S^2_{\mathrm{II\,VI}} \equiv S^2_{14,25,36}$	$S^2_{\mathrm{III\,VI}} \equiv S^2_{15,26,34}$

IV.	V.	VI.
$S^2_{\mathrm{I\,IV}} \equiv S^2_{14,26,35}$	$S^2_{\mathrm{I\,V}} \equiv S^2_{15,24,36}$	$S^2_{\mathrm{I\,VI}} \equiv S^2_{16,23,45}$
$S^2_{\mathrm{II\,IV}} \equiv S^2_{15,23,46}$	$S^2_{\mathrm{II\,V}} \equiv S^2_{13,26,45}$	$S^2_{\mathrm{II\,VI}} \equiv S^2_{14,25,36}$
$S^2_{\mathrm{III\,IV}} \equiv S^2_{12,36,45}$	$S^2_{\mathrm{III\,V}} \equiv S^2_{14,23,56}$	$S^2_{\mathrm{III\,VI}} \equiv S^2_{15,26,34}$
$S^2_{\mathrm{IV\,V}} \equiv S^2_{16,25,34}$	$S^2_{\mathrm{IV\,V}} \equiv S^2_{16,25,34}$	$S^2_{\mathrm{IV\,VI}} \equiv S^2_{13,24,56}$
$S^2_{\mathrm{IV\,VI}} \equiv S^2_{13,24,56}$	$S^2_{\mathrm{V\,VI}} \equiv S^2_{12,35,46}$	$S^2_{\mathrm{V\,VI}} \equiv S^2_{12,35,46}$

De même que trois droites D n'ayant aucun indice en commun se trouvent sur une surface S^2, de même trois surfaces S^2 n'ayant aucun indice en commun passent par une droite D. Cette droite peut être représentée par l'ensemble des indices de ces trois surfaces. Ainsi la droite D_{12} peut être aussi représentée par le symbole $D_{\mathrm{I\,II,\,III\,IV,\,V\,VI}}$, $S^2_{\mathrm{I\,II}}$, $S^2_{\mathrm{III\,IV}}$, $S^2_{\mathrm{V\,VI}}$ étant les trois surfaces qui passent par cette droite.

2. Deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{IK} (¹) ayant un indice commun n'ont aucune droite commune et se coupent suivant une biquadratique.

Deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{KL}, qui n'ont aucun indice commun, passent par une même droite D qui est la droite $D_{\mathrm{IJ,\,KL,\,MN}}$.

Trois surfaces S^2_{IJ}, S^2_{JK}, S^2_{KI}, dont les symboles ne contiennent que trois indices I, J, K, ont pour directrices les neuf droites D qui joignent trois sommets de l'hexacoryphe avec les trois autres sommets.

(¹) Nous ferons usage des lettres i, j, k, l, m, n pour indiquer une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, et des lettres I, J, K, L, M, N pour indiquer une permutation quelconque des indices I, II, III, IV, V, VI.

Ainsi, par exemple, sur les surfaces S^2_{III}, $S^2_{II,III}$, $S^2_{III,I}$ se trouvent les neuf droites qui joignent les points 1, 4, 5 avec les points 2, 3, 6.

3. La surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ est le lieu des points p d'où se projettent homologiquement sur un plan quelconque les deux triangles de chacun des quatre couples :

$$ikm \text{ et } jln, \quad ikn \text{ et } jlm, \quad ilm \text{ et } jkn, \quad iln \text{ et } jkm.$$

Le centre commun de ces quatre homologies se trouve sur la droite de la surface $S^2_{ij,kl,mn}$ passant en p et appuyée sur les trois droites D_{ij}, D_{kl}, D_{mn}.

Considérons une seconde surface $S^2_{JK} = S^2_{il,kn,jm}$ ayant un indice commun avec la surface $S^2_{IJ} = S^2_{ij,kl,mn}$, c'est-à-dire (n° 2) n'ayant aucune directrice commune avec elle. Cette nouvelle surface est aussi le lieu des points par lesquels, sur un plan quelconque, les deux triangles ikm et jln, du premier seulement des quatre couples précédents, se projettent homologues avec sommets correspondants les (il), (kn), (mj).

Par conséquent, de tous les points de la biquadratique suivant laquelle (n° 2) se coupent les deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{JK}, les deux triangles ikm et jln se projettent, sur un plan quelconque, de deux manières homologues. Puisque maintenant, dans ces deux homologies, aux projections des points i, k, m correspondent respectivement dans l'une les projections des points j, l, n, et dans l'autre les projections des points l, n, j, il s'ensuit que les projections de ces deux triangles seront aussi, d'une troisième manière, homologues de telle sorte qu'aux projections des points i, k, m correspondent respectivement les projections des points n, j, l. On déduit de là que tous les points de la ligne d'intersection des deux surfaces $S^2_{IJ} = S^2_{ij,kl,mn}$, $S^2_{JK} = S^2_{il,kn,mj}$ se trouvent sur la surface $S^2_{in,jk,lm}$, qui, d'après le n° 2, a aussi pour symbole S^2_{JK}. On parvient ainsi à la proposition suivante :

Trois surfaces représentées par des symboles de la forme S^2_{IJ}, S^2_{JK}, S^2_{KI} passent par une même biquadratique C_{IJK}.

Nous avons vingt telles biquadratiques qui se rangent en dix couples (C_{IJK}, C_{LMN}).

4. Si nous écrivons les neuf directrices des trois surfaces

$$S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}, \quad S^2_{JK} \equiv S^2_{il,kn,mj}, \quad S^2_{KI} \equiv S^2_{in,jk,ml}$$

qui passent par la biquadratique C_{IJK}, comme élément d'un déterminant du troisième ordre

$$\begin{vmatrix} D_{ij}, & D_{kl}, & D_{mn} \\ D_{kn}, & D_{mj}, & D_{il} \\ D_{ml}, & D_{in}, & D_{kj} \end{vmatrix},$$

en posant dans chaque ligne horizontale les trois directrices d'une même surface de manière que dans chaque ligne verticale ne se trouve pas le même indice plus d'une fois, nous pouvons remarquer :

α. Que ces droites prises trois à trois, quand elles se trouvent dans la même ligne verticale, sont les directrices des trois autres surfaces $S^2_{ij,kn,ml}$, $S^2_{kl,jm,in}$ et $S^2_{mn,il,kj}$, lesquelles ayant une droite commune avec chacune des trois premières surfaces, ont pour symboles (n° 2) S^2_{LM}, S^2_{MN}, S^2_{ML} et passent toutes (n° 3) par la biquadratique C_{LMN} accouplée à C_{IJK};

β. Que par tous les points de cette biquadratique C_{LMN}, sur un plan quelconque, se projettent de trois manières homologues, dans l'un des deux cas possibles, les mêmes deux triangles *ikm* et *jln* ;

γ. Que seulement les deux biquadratiques C_{IJK}, C_{LMN} ont cette dernière propriété.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les couples de biquadratiques C correspondent aux divers couples des faces opposées de l'hexacoryphe et les deux courbes de chaque couple sont le lieu des points par lesquels les deux triangles situés sur les deux faces opposées de l'hexacoryphe qui forment le couple correspondant se projettent, sur un plan quelconque, de trois manières homologues dans l'un ou dans l'autre de deux cas possibles.

Cela posé, nous pouvons représenter le couple des biquadratiques C_{IJK} et C_{LMN}, soit par le symbole $C_{(IJK)(LMN)}$, soit par le symbole $C_{(ikm)(jln)}$, F_{ikm} et F_{jln} étant le couple correspondant des faces opposées de l'hexacoryphe.

Ces nouveaux symboles de couples des biquadratiques C, d'après les indices donnés (n° 1) aux six pentades des surfaces S^2, sont

$$(123)(456) = (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI}), \quad (124)(356) = (\mathrm{I\,III\,VI})(\mathrm{II\,IV\,V}),$$
$$(125)(346) = (\mathrm{I\,IV\,VI})(\mathrm{II\,III\,V}), \quad (126)(345) = (\mathrm{I\,III\,V})(\mathrm{II\,IV\,VI}),$$
$$(134)(256) = (\mathrm{I\,V\,VI})(\mathrm{II\,III\,IV}), \quad (135)(246) = (\mathrm{I\,III\,VI})(\mathrm{III\,IV\,V}),$$
$$(136)(245) = (\mathrm{I\,III\,IV})(\mathrm{III\,V\,VI}), \quad (145)(236) = (\mathrm{I\,II\,III})(\mathrm{IV\,V\,VI}),$$
$$(146)(235) = (\mathrm{I\,III\,V})(\mathrm{III\,IV\,VI}), \quad (156)(234) = (\mathrm{I\,III\,IV})(\mathrm{II\,V\,VI}).$$

5. Sur chaque surface S^2 en dehors de ces trois directrices D se trouvent six autres droites G passant respectivement par les six sommets de l'hexacoryphe. Ainsi, la surface $S^2_{ij,kl,mn}$ contient les six droites qui constituent les intersections des faces

$$F_{ikl} \text{ et } F_{imn}, \quad F_{jkl} \text{ et } F_{jmn}, \quad F_{kij} \text{ et } F_{kmn},$$
$$F_{lij} \text{ et } F_{lmn}, \quad F_{mij} \text{ et } F_{mkl}, \quad F_{nij} \text{ et } F_{nkl}.$$

Nous pouvons représenter ces droites respectivement par les symboles

$$G_{i(kl,mn)}, \quad G_{j(kl,mn)}, \quad G_{k(mn,ij)}, \quad G_{l(mn,ij)}, \quad G_{m(ij,kl)}, \quad G_{n(ij,kl)}.$$

Il y a $15.6 = 90$ pareilles droites que nous distinguons par le nom de *génératrices des surfaces* S^2. Ces 90 droites se rangent en 45 couples $(G_{i(kl,mn)}, G_{j(kl,mn)})$ qui correspondent aux 45 couples (D_{kl}, D_{mn}) des droites D qui n'ont aucun indice en commun.

6. Deux surfaces S^2_{ij}, S^2_{kl} n'ayant aucun indice en commun se coupent suivant une droite D (n° 2) et une cubique passant par quatre sommets de l'hexacoryphe. Nous avons $\frac{15.6}{2} = 45$ telles cubiques et nous les représentons, par exemple celle par laquelle passent les deux surfaces $S^2_{\mathrm{I\,II}} = S^2_{12.34.56}$ et $S^2_{\mathrm{III\,IV}} = S^2_{13.24.56}$, soit par le symbole $C_{(\mathrm{I\,II},\,\mathrm{III\,IV})}$, soit par le symbole $C_{(13.24)}$.

7. Par la ligne d'intersection des deux surfaces $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ et $S^2_{KL} \equiv S^2_{ik,jl,mn}$, qui se compose de la droite D_{mn} et de la cubique $C_{IJ,KL} \equiv C_{il,jk}$, passent deux surfaces Σ^2 du second degré dont chacune coupe suivant quatre droites la troisième surface $S^2_{MN} \equiv S^2_{il,jk,mn}$ qui passe par la même droite D_{mn}, c'est-à-dire la première suivant les deux directrices D_{mn} et D_{il} et le couple correspondant (n° 5) des génératrices $(G_{j(il,mn)}, G_{k(il,mn)})$, et la seconde suivant les deux directrices D_{mn}, D_{jk} et le couple correspondant des génératrices

$$(G_{i(mn,jk)}, G_{l(mn,jk)}).$$

Nous représenterons ces deux surfaces par des symboles tels que

$$(1) \qquad \Sigma^2_{il,mn} \equiv \Sigma^2_{IK,JL} \quad \text{et} \quad \Sigma^2_{jk,mn} \equiv \Sigma^2_{IL,JK}.$$

Chacune de ces deux surfaces passe encore par une autre cubique C, c'est-à-dire la première par la cubique $C_{jk,mn} \equiv C_{IL,JK}$ et la seconde par la cubique $C_{il,mn} \equiv C_{IK,JL}$. De même donc que par la cubique $C_{IJ,KL} \equiv C_{il,jk}$ passent les deux surfaces (1), de même la surface $\Sigma^2_{IJ,KL} \equiv \Sigma^2_{il,jk}$ passe par les deux cubiques C ayant les mêmes indices.

Nous avons 45 telles surfaces Σ^2. Ces surfaces trois à trois, représentées par des symboles de la forme

$$(2) \qquad \Sigma^2_{ij,kl} \equiv \Sigma^2_{KL,MN}, \quad \Sigma^2_{kl,mn} \equiv \Sigma^2_{KM,LN}, \quad \Sigma^2_{mn,ij} \equiv \Sigma^2_{KN,LM},$$

rencontrent chacune suivant quatre droites la surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$.

Deux à deux, les trois surfaces Σ^2 de chacun de ces quinze triples se coupent suivant les 45 cubiques C.

Les 45 cubiques C correspondent aux 45 surfaces Σ^2 et la cubique $C_{ij,kl} \equiv C_{KL,MN}$ qui correspond à la surface $\Sigma^2_{ij,kl} \equiv \Sigma^2_{KL,MN}$ est l'intersection de deux surfaces Σ^2 qui, avec la surface considérée, forment le triple (2).

8. Si nous considérons un des six groupes I, II, III, IV, V, VI des surfaces S^2 (n° 1), trois quelconques de ces surfaces, par exemple les surfaces S^2_{KL}, S^2_{KM}, S^2_{KN} du groupe K, ne passent pas par une même

courbe, mais elles se coupent en deux points P différents des sommets de l'hexacoryphe que nous représenterons par le symbole P_{KLMN}.

Par ces deux points passent les trois biquadratiques C_{KLM}, C_{KMN}, C_{KLN} suivant lesquelles se coupent, prises deux à deux (n° 5), les trois surfaces S^2_{KL}, S^2_{KM}, S^2_{KN}. Par conséquent, par ces mêmes points passent aussi les trois surfaces S^2_{LM}, S^2_{MN}, S^2_{NL} et la biquadratique C_{LMN}, suivant laquelle elles se coupent.

Nous avons quinze tels couples de points P correspondant aux quinze surfaces S^2; le couple P_{KLMN} correspond à la surface S^2_{IJ}.

Sur chaque surface S^2 se trouvent six couples de points P, et trois couples de ces points se trouvent sur chaque biquadratique C. Les quatre biquadratiques qui forment couples avec les quatre biquadratiques qui passent par le couple des points P_{KLMN} sont celles par lesquelles passe la surface S^2_{IJ}. Ces quatre biquadratiques se coupent deux à deux suivant les six couples des points P situés sur cette surface S^2_{IJ}.

Les six surfaces S^2 qui passent par le couple de points P_{KLMN} se coupent aussi, prises deux à deux, comme il suit :

$$S^2_{KL} \text{ et } S^2_{MN}, \quad S^2_{KM} \text{ et } S^2_{LN}, \quad S^2_{KN} \text{ et } S^2_{LM},$$

suivant les trois directrices D de la surface S^2_{IJ} accompagnées par les trois cubiques

$$(1) \qquad C_{KL,MN}, \quad C_{KM,LN} \quad C_{KN,LM}.$$

Donc ces trois cubiques passent aussi par le couple des points P_{KLMN}.

Puisque les trois cubiques (1) sont aussi les intersections des trois surfaces

$$\Sigma^2_{KL,MN}, \quad \Sigma^2_{KM,LN}, \quad \Sigma^2_{KN,LM},$$

prises deux à deux, il s'ensuit que ces trois surfaces Σ^2 passent aussi par les mêmes points P_{KLMN} [1].

---

[1] Nous reviendrons sur ces points P dans un autre Travail relatif à l'étude de la projection de l'hexacoryphe d'un de ces points sur un plan quelconque.

II.

9. Si nous posons

$$(ijk) = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ x_i & y_i & z_i & w_i \\ x_j & y_j & z_j & w_j \\ x_k & y_k & z_k & w_k \end{vmatrix},$$

x_i, y_i, z_i, w_i étant les coordonnées du sommet i de l'hexacoryphe, la surface $S^2_{ij,kl,mn}$ sera représentée par une des trois équations équivalentes

$$(ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0, \quad (kli).(mnj) - (klj).(mni) = 0,$$
$$(mnk).(ijl) - (mnl).(ijk) = 0.$$

Les équations des quarante-cinq surfaces Σ^2 sont les équations qu'on obtient en changeant, dans les quarante-cinq équations précédentes des quinze surfaces S^2, le signe de l'un de deux polynomes qu'elle contient. Ainsi l'équation de la surface $\Sigma^2_{ij\,kl}$ est

$$(ijm).(kln) + (ijn).(klm) = 0.$$

10. Les dix polynomes du second degré $(1, 2, 3).(4, 5, 6)$, ..., dont chacun représente un couple des faces opposées de l'hexacoryphe, pris quatre à quatre, quand ces symboles ont dans la même parenthèse un même couple des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, sont liés par une identité linéaire. Nous avons quinze identités pareilles correspondant aux quinze droites D. L'identité qui correspond à la droite D_{ij} est

$$(ijk).(lmn) - (ijl).(knm) + (ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0.$$

Ces quinze identités comme les droites D (n° **1**) se rangent en six pentades 1, 2, 3, 4, 5, 6. Les cinq identités de chaque pentade sont indépendantes entre elles et de celles-ci l'on peut obtenir toutes les autres [1].

---

[1] D'une manière analogue, en prenant, dans l'espace à n dimensions, $2n$ points

11. Si nous ajoutons quatre à quatre les identités de chacune des six pentades, en ayant égard, dans la somme, à l'identité qui reste de la pentade considérée, nous formerons un nouveau groupe de quinze identités correspondant aussi aux quinze droites D et contenant chacun six polynomes. L'identité qui correspond à la droite D_{ij} est

$$\begin{aligned}(ikl).(jmn) + (imn).(jkl) - (ikm).(jln)\\ - (iln).(jkm) + (ikn).(jlm) + (ilm).(jkn) = 0,\end{aligned}$$

et contient les six polynomes qui n'entrent pas dans l'identité du n° **10** correspondant à la même droite D_{ij}, et qui n'ont pas les indices i, j dans la même parenthèse. Cette identité s'obtient en ayant égard à l'identité du n° **10** correspondant à la droite D_{ij}, soit dans la somme des quatre identités de la pentade i correspondant aux droites D_{ik}, D_{il}, D_{im}, D_{in}, soit dans la somme des identités de la pentade j correspondant aux droites D_{jk}, D_{jl}, D_{jm}, D_{jn}.

12. Si nous exprimons que les trente identités des n^{os} **10** et **11** se vérifient en un point quelconque de la droite D_{ij}, les unes de ces iden-

---

1, 2, 3, ..., $2n$, et les $\frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}$ polynomes du second degré qui, égalés à zéro, représentent les divers couples des faces opposées à $n-1$ dimensions de la figure, nous aurons, entre ces polynomes, $\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2\ldots(n-1)}$ identités linéaires correspondant aux diverses faces à $n-2$ dimensions de la figure.

Ces identités sont de la forme

$$\begin{aligned}(i_1\ldots i_{n-1}i_n).(i_{n+1}\ldots i_{2n}) &- (i_1\ldots i_{n-1}i_{n+1}).(i_n i_{n+2}\ldots i_{2n})\\ &+ (i_1\ldots i_{n-1}i_{n+2}).(i_n i_{n+1} i_{n+3}\ldots i_{2n}) - \ldots\\ &+ (-1)^{n-1}(i_1\ldots i_{n-1}i_{2n-1}).(i_n i_{n+1}\ldots i_{2n-2}i_{2n})\\ &+ (-1)^n (i_1\ldots i_{n-1}i_{2n}).(i_n i_{n+1}\ldots i_{2n-1}) = 0,\end{aligned}$$

$(i_1 i_2\ldots i_n) = 0$ étant l'équation sous forme de déterminant (n° 9) de la face à $n-1$ dimensions déterminée par les n sommets de la figure $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, et $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ étant les $n-1$ sommets de la figure qui déterminent la face à $n-2$ dimensions correspondant à cette identité.

tités se détruisent et les autres donnent l'identité

$$(ijkl).(ijmn) - (ijkm).(ijln) + (ijkn).(ijlm) = 0,$$

$(ijkl)$ étant la valeur que prend le polynome (jkl) (n° **9**) au point i.

Cette identité, multipliée par $(klmn)$, devient

$$A_{ij,kl,mn} + A_{ij,km,ln} + A_{ij,kn,lm} = A_{IJ} + A_{KI} + A_{MN} = 0,$$

$A_{ij,kl,mn} = A_{IJ}$ étant égal au produit $(ijkl)(klmn)(mnij)$.

On déduit de cette identité que

$$A_{IK} - A_{JK} = A_{IL} - A_{JL} = A_{IM} - A_{JM} = A_{IN} - A_{JN}.$$

Nous représenterons ces différences égales par le symbole $R_{IJ} = - R_{JI}$.

15. Il est aisé de voir que, étant donnés quatre de dix polynomes $(123).(456)$, $(124).(356)$, ... indépendants entre eux, tous les autres se déterminent et peuvent être exprimés linéairement au moyen de polynomes donnés. On conclut de là que ces dix polynomes pris cinq à cinq se lient par deux cent cinquante-deux identités linéaires et que six seulement de ces identités sont indépendantes entre elles.

Parmi ces deux cent cinquante-deux identités, les $15.6 = 90$, dont chacune contient quatre polynomes ayant dans la même parenthèse un même couple des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, et un quelconque des six autres polynomes, se confondent évidemment, prises six à six, avec les quinze identités déjà trouvées du n° **10**, parmi lesquelles nous avons vu que cinq seulement sont indépendantes entre elles.

Les autres $252 - 90 = 162$ identités peuvent être trouvées comme il suit :

Considérons une quelconque des $\frac{24.15}{2} = 180$ surfaces du second degré dont chacune passe par les six sommets de l'hexacoryphe et par trois de ses arêtes D consécutives qui ne forment pas un triangle : par exemple par les arêtes D_{kl}, D_{ij}, D_{jl}. Cette surface appartient évidemment au faisceau

$$(ikn).(jlm) + \lambda(ikm).(jln) = 0.$$

Si, dans cette équation, nous déterminons le paramètre λ de manière que l'équation se vérifie en un point quelconque de la droite D_{ij}, nous aurons l'équation de la surface considérée

$$A_{ij,kn,lm}.(ikm).(jln) + A_{ij,km,nl}.(ikn).(jlm) = 0.$$

Mais l'équation de cette même surface, puisqu'elle contient la droite D_{ij}, peut aussi se former au moyen de trois quelconques des quatre polynomes

$$(ijk).(lmn), \quad (ijl).(kmn), \quad (ijm).(kln), \quad (ijn).(klm)$$

qui s'annulent en un point quelconque de la droite D_{ij} et qui, n'étant pas indépendants entre eux, se lient par l'identité du n° **10**, correspondant à la droite D_{ij}.

Si donc, au moyen de ces quatre polynomes pris trois à trois, nous formons les quatre équations équivalentes de la surface considérée et si nous identifions ces équations avec l'équation déjà trouvée de cette même surface, nous aurons les quatre suivantes des cent soixante-deux identités cherchées :

$$(1)\quad \begin{cases} A_{km,in,jl}.(kij).(mnl) + A_{ik,jn,lm}.(ijl).(kmn) + A_{ji,ln,mk}.(jlm).(ink) \\ \qquad + A_{lj,mn,ki}.(lmk).(jni) + A_{ml,kn,ij}.(mki).(lnj) = 0, \\ A_{kn,im,jl}.(kij).(nml) + A_{ik,jm,ln}.(ijl).(kmn) + A_{ji,lm,nk}.(jln).(imk) \\ \qquad + A_{lj,nm,ki}.(lnk).(jmi) + A_{nl,km,ij}.(nki).(lmj) = 0. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} R_{IJ}.(ijk)(lmn) + A_{ik,jn,ml}.(ijm).(kln) + A_{ik,jm,nl}.(ijn).(kml) \\ \qquad + A_{ij,kn,ml}.(ikm).(jnl) + A_{ij,km,nl}.(ikn).(jml) = 0, \\ R_{IJ}.(jli)(kmn) + A_{jl,in,mk}.(jim).(lnk) + A_{jl,im,nk}.(jin).(lmk) \\ \qquad + A_{jl,lm,nk}.(jln).(imk) + A_{jl,ln,mk}.(jlm).(ink) = 0. \end{cases}$$

ou (n° **12**)

$$\begin{aligned} R_{IJ} = -R_{JI} = \pm R_{il,jk,mn} &= A_{ik,jm,ln} - A_{im,jl,kn} = A_{in,jl,km} - A_{ik,jn,lm} \\ &= A_{ij,kn,lm} - A_{in,jm,kl} = A_{im,jn,kl} - A_{ij,km,ln}. \end{aligned}$$

Ces identités, prises deux à deux, donnent l'identité

$$(ijk).(lmn) - (ijl).(kmn) + (ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0$$

du n° **10** qui correspond à la droite D_{ij}. On voit donc que cinq identités du n° **10** indépendantes entre elles et une quelconque des identités du présent numéro forment un groupe de six identités indépendantes entre elles, desquelles se produisent toutes les autres identités. On peut aussi de plusieurs manières, parmi les cent soixante-deux nouvelles identités, choisir six identités indépendantes entre elles, une fois que les identités du n° **10** ne sont qu'une conséquence de celles-ci.

14. Ces cent soixante-deux nouvelles identités se rangent en deux groupes dont l'un contient soixante-douze et l'autre quatre-vingt-dix identités.

Les $\frac{1}{2}\,\frac{1.2.3.4.5}{5}\cdot 6 = 72$ identités du premier groupe contiennent chacune cinq polynomes qui, pris trois à trois de cinq manières différentes, s'annulent en un point quelconque d'une des cinq arêtes consécutives D de l'hexacoryphe, formant un pentagone gauche fermé. Les deux premières identités (1) des quatre identités que nous avons écrites appartiennent à ce groupe et, pour celles-ci, les arêtes consécutives de l'hexacoryphe sont, pour la première, D_{ki}, D_{ij}, D_{jl}, D_{lm}, D_{mk}, et, pour la seconde, D_{ki}, D_{ij}, D_{jl}, D_{ln}, D_{nk}.

Dans chacune de ces soixante-douze identités, bien simples, on peut prendre, de cinq manières différentes, une somme de deux termes dont les coefficients A ont un couple d'indices commun. Ces cinq sommes égalées à zéro représentent les cinq surfaces du second degré qui passent chacune par les six sommets de l'hexacoryphe et par trois côtés consécutifs du pentagone correspondant à l'identité considérée.

Cela considéré, la détermination géométrique des surfaces représentées par les autres sommes des termes de la même identité, pris deux à deux, est une conséquence immédiate de l'existence de cette identité [1].

Maintenant les autres $15 . 6 = 90$ identités du second groupe contiennent chacune cinq polynomes dont les quatre n'entrent pas dans les trois équations équivalentes (n° **9**) d'une des quinze surfaces S, et

---

[1] Si, dans une quelconque de ces soixante-douze identités, nous remplaçons les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 par les indices I, II, III, IV, V, VI, en ayant égard aux correspondances des n^{os} **1** et **4**, exceptions faites des signes, elle prendra la forme

le cinquième est un quelconque des six autres polynomes. Les deux dernières identités (2), des quatre identités que nous avons écrites, appartiennent à ce groupe et contiennent, toutes les deux, les quatre polynomes :

$$(ijm).(kln), \quad (ijn).(klm), \quad (ikm).(jln), \quad (ikn).(jlm),$$

qui n'ont dans la même parenthèse aucun des trois couples des indices (i, l), (j, k), (m, n) et, par conséquent, n'entrent pas dans les trois équations équivalentes de la surface $S_{il,jk,mn} = S_{IJ}$.

Dans chacune de ces quatre-vingt-dix identités, on peut prendre, de quatre manières différentes, une somme de deux termes dont les coefficients A ont un couple d'indices commun. S'il s'agit de l'identité qui lie le polynome $(ikl).(jmn)$ et les quatre polynomes qui n'entrent pas dans les équations de la surface $S_{ij,kl,mn}$, ces quatre sommets, égalés à zéro, représentent les quatre surfaces du second degré qui passent par les six sommets de l'hexacoryphe et chacune par un des quatre triples suivants d'arêtes consécutives de l'hexacoryphe

$$(D_{ki}, D_{li}, D_{lj}), \quad (D_{li}, D_{ik}, D_{kj}), \quad (D_{mj}, D_{jn}, D_{ni}), \quad (D_{nj}, D_{jm}, D_{mi}).$$

Cela considéré, la détermination géométrique des surfaces représentées par les autres sommes des termes de la même identité, pris deux à deux, est une conséquence de cette même identité (¹).

---

aussi simple :

$$A_{IK,IJK(LMN)} + A_{JL,JKL(MIN)} + A_{KM,KLM(IJM)} + A_{LI,LMI(JKN)} + A_{MJ,MIJ(KLN)} = 0$$

ou, si l'on change l'ordre des termes,

$$A_{IK,IJK(LMN)} + A_{KM,KLM(IJN)} + A_{MJ,MIJ(KLN)} + A_{JL,JKL(MIN)} + A_{LI,LMI(JKN)} = 0.$$

On parvient ainsi à des correspondances entre les arrangements des six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, cinq à cinq, et les arrangements pareils des six indices I, II, III, IV, V, VI.

(¹) Si, comme pour les autres identités, nous remplaçons dans une quelconque de ces quatre-vingt-dix identités, les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 par les indices I, II, III, IV, V, VI, elle prendra la forme

$$B_{IJ,IKL(JMN)} + A_{JK,IJK(LMN)} + A_{JL,IJL(KMN)} + A_{IM,IJM(KLN)} + A_{IN,IJN(KLM)} = 0,$$

qui est plus simple que l'autre.

15. Si l'on considère l'équation

$$\lambda.(ijm).(kln) + \mu.(ijn).(klm) = 0,$$

où $\lambda : \mu$ est un paramètre et $(ijm).(kln)$, $(ijn).(klm)$, deux quelconques des dix polynomes $(123).(456)$, $(124).(356)$, ... ; elle représente évidemment un faisceau de surfaces du second degré dont la biquadratique commune se forme d'un couple de droites D n'ayant aucun indice en commun (le couple D_{ij}, D_{kl}) et du couple correspondant (n° **5**) de droites G (le couple $G_{m(ij,kl)}$, $G_{n(ij,kl)}$).

Il y a en tout $\frac{10.9}{2} = 45$ tels faisceaux correspondant aux quarante-cinq couples de droites D qui n'ont aucun indice en commun.

Il est facile de voir que trois de ces faisceaux, dont les équations contiennent six polynomes différents entre eux, sont homographiques entre eux. Dans ces homographies, à chaque surface d'un des faisceaux correspondent des surfaces de deux autres faisceaux qui la coupent suivant la même biquadratique.

En effet, toutes les surfaces des trois faisceaux passent par les six sommets de l'hexacoryphe et n'ont aucun autre point commun, puisque, autrement, les six polynomes qui entrent dans les équations de ces trois faisceaux appartiendraient au même réseau de surfaces du second degré, ce qui est contraire à ce que nous avons dit au n° **13**.

Cela posé, il est évident que les surfaces des deux autres faisceaux qui coupent suivant la même biquadratique une surface arbitraire du premier faisceau passent chacune par les deux points, différents des sommets de l'hexacoryphe, suivant lesquels les deux droites G communes aux surfaces de l'autre faisceau coupent la surface arbitraire du premier faisceau.

16. On parvient aux mêmes résultats si l'on considère que les six polynomes, différents entre eux, qui entrent dans les équations des trois faisceaux se lient toujours par deux identités indépendantes entre elles (n° **13**). Si donc nous représentons par $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ces six polynomes et si nous supposons que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 = 0$$

sont les deux identités qui lient ces six polynomes, nous aurons l'identité plus générale

$$\begin{aligned}&\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6)\\ &+ \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6) = 0,\end{aligned}$$

où le paramètre $\lambda : \mu$ peut prendre toute valeur arbitraire.

Si maintenant nous écrivons cette identité sous la forme

$$\begin{aligned}&(\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 + (\lambda a_3 + \mu b_3)x_3\\ &+ (\lambda a_4 + \mu b_4)x_4 + (\lambda a_5 + \mu b_5)x_5 + (\lambda a_6 + \mu b_6)x_6 = 0,\end{aligned}$$

et si nous séparons de l'une quelconque des quinze manières possibles en trois couples les six termes de son premier membre, nous aurons trois polynomes du second degré qui, égalés à zéro, par exemple

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 = 0,\\ &(\lambda a_3 + \mu b_3)x_3 + (\lambda a_4 + \mu b_4)x_4 = 0,\\ &(\lambda a_5 + \mu b_5)x_5 + (\lambda a_6 + \mu b_6)x_6 = 0,\end{aligned}\right.$$

représentent trois faisceaux de surfaces du second degré homographiques selon la manière exposée, c'est-à-dire que pour chaque valeur du paramètre $\lambda : \mu$ ces trois équations représentent trois surfaces du second degré passant par la même biquadratique.

Puisqu'il y a deux cent dix combinaisons des dix polynomes (123)(456), (124)(356), ..., six à six et que quinze triples de faisceaux homographiques se produisent de chacune de ces combinaisons, il s'ensuit que les quarante-cinq faisceaux de surfaces du second degré qui correspondent aux quarante-cinq couples de droites D n'ayant aucun indice en commun, se rangent de $210 : 15 = 3150$ manières différentes en triples homographiques.

A chacun de ces trois mille cent cinquante triples de faisceaux homographiques correspond une surface du quatrième degré qui est le lieu décrit par la biquadratique, par chaque position de laquelle passent trois surfaces appartenant respectivement aux trois faisceaux homographiques qui forment le triple correspondant.

L'équation qui représente cette surface est une quelconque des trois équations équivalentes que l'on trouve en éliminant le paramètre $\lambda : \mu$ entre deux quelconques des équations (1) qui représentent les trois faisceaux homographiques formant le triple correspondant.

Toutes ces trois mille cent cinquante surfaces du quatrième degré ont pour points doubles les six sommets de l'hexacoryphe et chacune d'elles passe par les trois biquadratiques dont chacune est commune aux surfaces d'un des trois faisceaux homographiques du triple correspondant, c'est-à-dire chacune de ces surfaces passe par trois couples de droites D n'ayant pas d'indice commun et par les trois couples correspondants de droites G [1].

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ces trois mille cent cinquante surfaces du quatrième degré et des triples correspondants de faisceaux homographiques de surfaces du second degré. De même, nous ne formerons pas une étude géométrique des cent soixante-deux identités du n° **13** de laquelle se déduisent plusieurs propriétés des surfaces du second degré représentées par les sommes des termes de ces identités pris deux à deux.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons seulement à l'étude des identités des n^{os} **10** et **11** qui entraînent aussi toutes les propriétés, énoncées jusqu'à maintenant, des surfaces S^2 et Σ^2 (n^{os} **5**, **7** et **8**).

III.

17. Les quarante-cinq surfaces Σ^2 (n° **7**) prises trois à trois, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$\Sigma^2_{ij,kl} = \Sigma^2_{IJ,KL}, \quad \Sigma^2_{ik,jl} = \Sigma^2_{KL,MN}, \quad \Sigma^2_{il,jk} = \Sigma^2_{MN,IJ},$$

[1] Quelques-unes de ces surfaces dégénèrent et deviennent soit deux des quinze surfaces S, soit une de ces surfaces et une des cent quatre-vingts surfaces (n° **13**) du second degré qui passent par les six sommets de l'hexacoryphe et par trois de ces arêtes consécutives ne formant pas un triangle. Dans ces cas, l'un des trois faisceaux homographiques du triple correspondant devient une surface déterminée et les surfaces correspondantes des deux autres faisceaux homographiques se coupent toujours sur cette surface déterminée ou se confondent en une seule surface.

passent par une même biquadratique. Nous avons quinze pareilles biquadratiques correspondant aux quinze droites D. Nous les représentons par des symboles de la forme $T_{(ijkl)} = T_{IJ,KL,MN}$, $D_{mn} = D_{IJ,KL,MN}$ étant la droite correspondante.

Cette propriété des surfaces Σ^2 est une conséquence de l'existence des identités du n° **11**, puisque les trois polynomes qui représentent trois pareilles surfaces entrent toujours dans une même de ces identités.

Il faut remarquer que la cubique $C_{ij,kl}$ (n° **6**) rencontre, en deux points différents des sommets de l'hexacoryphe, chacune des deux biquadratiques $T_{(ijmn)}$, $T_{(klmn)}$. De même, la biquadratique $T_{(ijkl)}$ rencontre en deux points différents des sommets de l'hexacoryphe chacune des six cubiques

$$C_{ij,mn}, \quad C_{ik,mn}, \quad C_{il,mn}, \quad C_{jk,mn}, \quad C_{jl,mn}, \quad C_{kl,mn}.$$

18. Les quarante-cinq surfaces Σ^2 prises trois à trois, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$\Sigma^2_{ij,kl} = \Sigma^2_{IJ,KL}, \quad \Sigma^2_{ij,km} = \Sigma^2_{KM,IN}, \quad \Sigma^2_{ij,kn} = \Sigma^2_{IN,JM},$$

passent par une même ligne du quatrième degré composée de la droite D_{ij} et d'une cubique que nous représentons par le symbole $l_{(ij)k}$. Nous avons soixante cubiques pareilles.

Plus généralement, on peut remarquer que, si l'on considère les six faisceaux du second degré qui (n° **15**) correspondent aux six couples de droites D qui contiennent une même droite D_{ij}, il existe une double infinité de cubiques par chacune desquelles passent six surfaces appartenant respectivement à ces six faisceaux. Les équations de six pareilles surfaces sont de la forme

$$\frac{(ijk).(lmn)}{\lambda_1} = \frac{-(ijl).(kmn)}{\lambda_2} = \frac{(ijn).(klm)}{\lambda_3} = \frac{-(ijm).(kln)}{\lambda_4}$$

où il faut avoir

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

Cette propriété n'est qu'une conséquence immédiate de l'identité du n° **10** :

$$(ijk).(lmn) - (ijl).(kmn) + (ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0.$$

19. *a.* Les quarante-cinq surfaces Σ^2 se rangent en dix groupes $(ijk).(lmn) \equiv (\mathrm{IJK}).(\mathrm{LMN})$ (n° **4**). Le groupe $(ijk)(lmn)$ contient les neuf surfaces dont chacune passe par deux des six droites D situées sur les faces F_{ijk} et F_{lmn} de l'hexacoryphe; c'est-à-dire les deux couples des indices de chacune de ces neuf surfaces sont contenus chacun dans une des parenthèses de l'indice du groupe.

b. Les quarante-cinq cubiques C se rangent aussi en dix groupes ayant les mêmes indices. Le groupe $(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})$ contient les neuf cubiques suivant lesquelles, prises deux à deux, se coupent les six surfaces S^2 qui n'ont pour directrice aucune des six droites D situées sur les deux faces F_{ijk}, F_{lmn} de l'hexacoryphe. Ces six surfaces se coupent d'autre part, prises trois à trois, suivant les deux biquadratiques $C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})}$ (n° **4**).

Donc, toutes les neuf cubiques du groupe $(ijk)(lmn)$ sont rencontrées chacune en deux points différents des sommets de l'hexacoryphe, par chacune des deux biquadratiques C qui forment le couple ayant le même indice que le groupe considéré.

20. Les neuf surfaces Σ^2 de chaque groupe, prises quatre à quatre, de neuf manières différentes correspondant aux neuf surfaces de ce groupe, passent par deux points f différents des sommets de l'hexacoryphe. Ainsi, si nous considérons la surface $\Sigma^2_{ij,mn}$, dans le groupe $(ijk)(lmn)$, nous aurons comme correspondantes à cette surface les quatre surfaces

$$(1) \qquad \Sigma^2_{ij,lm}, \quad \Sigma^2_{ij,ln}, \quad \Sigma^2_{mn,ki}, \quad \Sigma^2_{mn,kj},$$

lesquelles, seules, parmi les surfaces du groupe considéré, rencontrent la surface $\Sigma^2_{ij,mn}$ suivant une de ces directrices D_{ij}, D_{mn}.

La vérité de cette propriété devient évidente si l'on considère que les équations de quatre telles surfaces sont de la forme

$$x_1 + y = 0, \qquad x_2 + y = 0, \qquad x_3 - y = 0, \qquad x_4 - y = 0,$$

où

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

est une des identités du n° **10**.

Par les deux points f où se rencontrent les quatre surfaces (1) passent aussi (n° **18**) les deux surfaces

$$(2) \qquad \Sigma^2_{ij,kl} \quad \text{et} \quad \Sigma^2_{mn,kl}$$

(les équations de ces deux surfaces sont $x_1 - x_2 = 0$ et $x_3 - x_4 = 0$). L'intersection de ces deux surfaces qui est la cubique $C_{ij,mn}$ avec la droite D_{kl} passe aussi par les mêmes deux points f.

Puisque chaque surface Σ^2 appartient à deux groupes, si nous considérons aussi dans le groupe $(ijl)(kmn)$ la surface $\Sigma^2_{ij,mn}$ considérée dans le groupe $(ijk)(lmn)$, nous aurons quatre nouvelles surfaces

$$\Sigma^2_{ij,km}, \quad \Sigma^2_{ij,kn}, \quad \Sigma^2_{mn,il}, \quad \Sigma^2_{mn,jl},$$

et de nouveau les deux surfaces (2) passant par un autre couple de points f situés aussi sur la cubique $C_{ij,mn}$ ayant le même indice avec la surface considérée $\Sigma^2_{ij,mn}$.

La totalité des points f est évidemment quatre-vingt-dix couples.

Les couples des points f peuvent aussi être considérés comme les intersections des cubiques t (n° **15**), lesquelles, d'après ce qui a été exposé, se coupent suivant deux points f quand elles sont représentées par des symboles $t_{(ij)k}$, $t_{(mn)l}$ n'ayant aucun indice commun. Les neuf couples des points f suivant lesquels les trois cubiques $t_{(ij)k}$, $t_{(jk)i}$, $t_{(ki)j}$ rencontrent les trois cubiques $t_{(lm)n}$, $t_{(mn)l}$, $t_{(nl)m}$, sont les correspondantes aux neuf surfaces du groupe $(ijk)(lmn)$ considérées dans ce groupe.

21. Les neuf cubiques d'un groupe $(ijk)(lmn) = (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})$, prises trois à trois, de six manières différentes, se coupent suivant deux points q différents des sommets de l'hexacoryphe. Chaque triple se compose de trois cubiques de la forme

$$C_{ij,lm} = C_{\mathrm{IJ,LM}}, \quad C_{jk,mn} = C_{\mathrm{IJ,MN}}, \quad C_{ki,nl} = C_{\mathrm{IJ,NL}}.$$

Un examen simple des indices de ces trois cubiques nous apprend que les six couples de points q dérivés du groupe

$$(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})$$

sont les couples des points différents des sommets de l'hexacoryphe suivant lesquels chacune des deux biquadratiques du couple

$$C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})} \quad (\text{n}^{\circ}\ 3)$$

rencontre chacune des trois surfaces S^2 qui passent par l'autre biquadratique de ce couple. Ainsi, les six couples de points q dérivés du groupe $(ijk)(lmn)$ se trouvent trois à trois sur les deux biquadratiques du couple $C_{(ijk)(lmn)}$ et deux à deux sur les neuf cubiques C de ce groupe.

Puisque chaque cubique $C_{ij,kl}$ appartient à deux groupes $(ijm)(kln)$, $(ijn)(klm)$, il s'ensuit que quatre couples des points q se trouvent sur chaque cubique C et que la totalité de ces points est soixante couples.

Il est évident que par chaque couple de points q passent six surfaces Σ^2 et quatre surfaces S^2.

22. De même, les neuf surfaces Σ^2 de chaque groupe

$$(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN}),$$

prises trois à trois, de six manières différentes, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$\Sigma^2_{ij,lm} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ,LM}}, \quad \Sigma^2_{jk,mn} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ,MN}}, \quad \Sigma^2_{ki,nl} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ,NL}},$$

ont la propriété de se couper, prises deux à deux, suivant trois biquadratiques par chacune desquelles passe une des trois surfaces S^2_{NL}, S^2_{LM}, S^2_{MN} qui se coupent suivant la biquadratique C_{LMN}. Nous avons soixante pareils triples de surfaces Σ et, par conséquent, cent quatre-vingts nouvelles biquadratiques par chacune desquelles passent deux surfaces Σ^2 et une surface S^2. Chaque surface Σ^2 passe par huit telles biquadratiques et chaque surface S^2 par douze.

23. Si l'on prend les dix-huit surfaces Σ^2 qui passent (n° **7**) deux à deux par les neuf cubiques C du groupe

$$(123)(456) = (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI}),$$

par exemple, elles diffèrent toutes entre elles et peuvent être posées comme les éléments de deux déterminants

$$\left|\begin{array}{lll}
\Sigma^2_{12,34} = \Sigma^2_{\mathrm{IV\,VI,\,III\,V}} & \Sigma^2_{12,35} = \Sigma^2_{\mathrm{I\,III,\,III\,IV}} & \Sigma^2_{12,36} = \Sigma^2_{\mathrm{II\,V,\,I\,VI}} \\
\Sigma^2_{13,24} = \Sigma^2_{\mathrm{III\,V,\,I\,III}} & \Sigma^2_{13,25} = \Sigma^2_{\mathrm{III\,IV,\,V\,VI}} & \Sigma^2_{13,26} = \Sigma^2_{\mathrm{I\,VI,\,III\,IV}} \\
\Sigma^2_{14,23} = \Sigma^2_{\mathrm{I\,III,\,IV\,VI}} & \Sigma^2_{15,23} = \Sigma^2_{\mathrm{V\,VI,\,I\,III}} & \Sigma^2_{16,23} = \Sigma^2_{\mathrm{III\,IV,\,II\,V}}
\end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{lll}
\Sigma^2_{45,56} = \Sigma^2_{\mathrm{V\,VI,\,III\,IV}} & \Sigma^2_{24,56} = \Sigma^2_{\mathrm{I\,III,\,II\,V}} & \Sigma^2_{14,56} = \Sigma^2_{\mathrm{II\,IV\,I\,VI}} \\
\Sigma^2_{45,46} = \Sigma^2_{\mathrm{III\,IV,\,I\,III}} & \Sigma^2_{25,46} = \Sigma^2_{\mathrm{II\,V,\,IV\,VI}} & \Sigma^2_{15,46} = \Sigma^2_{\mathrm{I\,VI,\,III\,V}} \\
\Sigma^2_{36,45} = \Sigma^2_{\mathrm{I\,III,\,V\,VI}} & \Sigma^2_{26,45} = \Sigma^2_{\mathrm{IV\,VI,\,I\,III}} & \Sigma^2_{16,45} = \Sigma^2_{\mathrm{III\,V,\,III\,IV}}
\end{array}\right|.$$

Alors, on voit aisément que ces dix-huit surfaces, qui se coupent deux à deux suivant les neuf cubiques du groupe

$$(123)(456) = (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI}),$$

quand elles ont la même place dans les deux déterminants et qui passent toutes par les six sommets de l'hexacoryphe :

α'. Prises trois à trois de six manières différentes, passent par six cubiques t (n° **18**) (quand elles se trouvent dans la même ligne horizontale que l'un des deux déterminants);

β'. Prises trois à trois, de six manières différentes, passent par six biquadratiques T (n° **17**) (quand elles se trouvent dans la même ligne verticale de l'un des deux déterminants);

γ'. Prises six à six, de neuf manières différentes, passent par les neuf couples de points f (n° **20**) qui correspondent aux neuf surfaces Σ^2 du groupe $(123)(456) = (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI})$, considérées dans ce groupe (quand elles se trouvent dans une ligne horizontale de chacun des deux déterminants);

δ'. Prises six à six, de six manières différentes, passent par les six

couples de points q (n° **21**) dérivés du groupe

$$(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI})$$

(quand elles se trouvent dans les termes de même rang des deux déterminants ordonnés, l'un suivant la première ligne horizontale et le second suivant la première ligne verticale);

ε'. Prises cinq à cinq, de dix-huit manières différentes, passent par les dix-huit couples des points où se rencontrent les cubiques t et les biquadratiques T considérées plus haut (quand elles se trouvent dans une ligne horizontale et une ligne verticale de l'un des deux déterminants).

IV.

24. Il y a quinze surfaces $S^{2,3}$ du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe. Ces surfaces passent toutes par les quinze couples de points P (n° **8**) et correspondent aux quinze droites D_{ij}.

Nous représenterons ces surfaces par des symboles de la forme $S_{ij}^{2,3} \equiv S_{\mathrm{IJ,\,KL,\,MN}}^{2,3}$, ce symbole représentant la surface qui correspond à la droite $D_{ij} \equiv D_{\mathrm{IJ,\,KL,\,MN}}$.

L'équation de la surface $S_{ij}^{2,3} \equiv S_{\mathrm{IJ,\,KL,\,MN}}^{2,3}$ est

$$(1) \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0,$$

dans laquelle $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sont six des dix polynomes du second degré (123)(456), (124)(356), ... liés par l'identité

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

qui est celle des identités du n° **11** qui correspond à la droite

$$D_{ij} \equiv D_{\mathrm{IJ,\,KL,\,MN}}.$$

25. Sur chaque surface $S_{ij}^{2,3} \equiv S_{\mathrm{IJ,\,KL,\,MN}}^{2,3}$ sont situées les quinze courbes suivantes du quatrième degré :

α. Les huit biquadratiques qui font les quatre couples

$$C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(ILM)(JKN)}, \qquad C_{(ijl)(kmn)} \equiv C_{(IKN)(JLM)},$$
$$C_{(ijm)(kln)} \equiv C_{(ILN)(JKM)}, \qquad C_{(ijn)(klm)} \equiv C_{(IKM)(JLN)} \quad (^1);$$

β. La biquadratique $T_{klmn} \equiv T_{IJ,KL,MN}$ (n° **17**);

γ. Les six droites D qui joignent deux à deux les quatre points k, l, m, n accompagnées par les six cubiques qui ont commun le couple des indices i et j, lesquelles sont (n° **17**) toutes rencontrées par la biquadratique T_{klmn}, chacune suivant deux points différents des sommets de l'hexacoryphe.

Six à six, les quinze surfaces $S^{2,3}$ passent par le même couple de biquadratiques C et six à six par la même droite D. Ainsi, par le couple de biquadratiques $C_{(ijk)(lmn)}$ passent les six surfaces $S^{2,3}_{ij}$, $S^{2,3}_{jk}$, $S^{2,3}_{ki}$, $S^{2,3}_{lm}$, $S^{2,3}_{mn}$, $S^{2,3}_{nl}$, et par la droite D_{ij} les six surfaces $S^{2,3}_{kl}$, $S^{2,3}_{km}$, $S^{2,3}_{kn}$, $S^{2,3}_{lm}$, $S^{2,3}_{ln}$, $S^{2,3}_{mn}$.

26. Les quinze courbes du quatrième degré situées sur la surface $S^{2,3}_{ij} \equiv S^{2,3}_{IJ,KL,MN}$ représentée par l'équation (1) du n° **24**, prises trois à trois, se trouvent sur les quinze surfaces du second degré, ayant pour équations $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, ... Ces surfaces, prises trois à trois, quand elles sont représentées par des équations n'ayant aucun polynome commun, passent par une même des quinze courbes du quatrième degré et sont les douze surfaces S^2 qui ne passent pas par la droite $D_{ij} \equiv D_{IJ,KL,MN}$ et les trois surfaces $\Sigma^2_{kl,mn}$, $\Sigma^2_{km,ln}$, $\Sigma^2_{kn,lm}$ qui passent par la biquadratique T_{klmn} (²).

(¹) En énumérant les points d'intersection d'une surface $S^{2,3}_{ij}$ et de deux surfaces S^2 passant respectivement par les deux courbes C, qui forment l'un des quatre couples qui se trouvent sur la surface $S^{2,3}_{ij}$, nous pouvons voir que les deux courbes C du couple considéré ne se coupent qu'aux six sommets de l'hexacoryphe. Si les deux courbes du couple $C_{(ijk)(lmn)}$ avaient un autre point commun, de ce point et sur un plan quelconque les deux triangles ijk et lmn seraient projetés six fois homologues, ce qui ne peut arriver que dans des cas exceptionnels, ainsi que nous l'établirons dans un prochain Travail (*voir* n° 8).

(²) Ces quinze surfaces du second degré $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, ... et les quinze courbes du quatrième degré ($x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_5 + x_6 = 0$)

27. Les quinze surfaces $S^{2,3}$, prises trois à trois, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$S_{ij}^{2,3} \equiv S_{IJ,\,KL,\,MN}^{2,3}, \qquad S_{jk}^{2,3} \equiv S_{LN,\,JM,\,IK}^{2,3}, \qquad S_{ki}^{2,3} \equiv S_{KM,\,IN,\,JL}^{2,3},$$

passent par une même courbe du trente-sixième degré L_{ijk} ayant pour points du neuvième ordre les six sommets de l'hexacoryphe et passant par tous les quinze couples des points P (n° **8**). Nous avons vingt pareilles courbes qui se rangent en dix couples $L_{(ijk)(lmn)} \equiv L_{(ILM)(JKN)}$.

Les deux biquadratiques $C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(ILM)(JKN)}$ et les trois droites D_{lm}, D_{mn}, D_{nl} sont parties de la courbe L_{ijk}. Donc la courbe L_{ijk} correspond à la face F_{ijk} de l'hexacoryphe et le couple des courbes $L_{(ijk)(lmn)} \equiv L_{(ILM)(JKN)}$ correspond au couple des courbes du quatrième degré $C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(ILM)(JKN)}$.

28. Deux surfaces $S_{ij}^{2,3} \equiv S_{IJ,\,KL,\,MN}^{2,3}$, $S_{kl}^{2,3} \equiv S_{IJ,\,KN,\,LM}^{2,3}$ ayant en commun un couple I, J, des indices I, II, ... et, par conséquent, aucun des indices 1, 2, 3, ..., en commun, se coupent suivant une courbe du trente-sixième degré $A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$ ayant pour points multiples du neuvième ordre les six sommets de l'hexacoryphe et passant par tous les quinze couples de points P (n° **8**).

Nous avons quarante-cinq pareilles courbes $A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$ correspondant aux quarante-cinq cubiques $C_{ij,kl} \equiv C_{KM,LN}$. La courbe

$$A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$$

se compose des deux couples de biquadratiques $C_{(ijm)(kln)} \equiv C_{(KMI)(LNJ)}$, $C_{(ijn)(klm)} \equiv C_{(KMI)(LNI)}$ de la cubique $C_{ij,kl} \equiv C_{KM,LN}$ avec la droite D_{mn}, et d'une courbe $K_{ij,kl} \equiv K_{KM,LN}$ du seizième degré correspondant aussi à la cubique $C_{ij,kl} \equiv C_{KM,LN}$.

29. Il y a aussi quarante-cinq surfaces $\Sigma_{ij,kl}^{2,3} \equiv \Sigma_{KM,LN}^{2,3}$ du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe et

---

situées sur la surface $S_{ij}^{2,3}$ forment une configuration semblable et ayant des propriétés analogues à celles de la configuration remarquable des quinze cercles dans l'espace étudiée par M. Cyp. Stéphanos (*Comptes rendus*, 1881, 2e semestre, p. 578 et 633).

correspondant aux quarante-cinq surfaces du second degré

$$\Sigma^{2,3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2,3}_{KM,LN};$$

c'est-à-dire que ces surfaces passent (n° **7**) deux à deux par chacune des quarante-cinq courbes A (n° **28**) et contiennent chacune deux de ces courbes, et généralement elles ont des propriétés analogues à celles des surfaces Σ^2. Ainsi les deux surfaces :

$$\Sigma^{2,3}_{ik,jk} \equiv \Sigma^{2,3}_{IJ,KM}, \qquad \Sigma^{2,3}_{ik,jl} \equiv \Sigma^{2,3}_{IJ,LN}$$

passent par la courbe $A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$, et encore la première passe par la courbe $A_{ik,jl} \equiv A_{IJ,LN}$ et la seconde par la courbe $A_{ik,jk} \equiv A_{IJ,KM}$.

L'équation de la surface $\Sigma^{2,3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2,3}_{KM,LN}$ est

$$\begin{aligned} &2(ijn)^3.(klm)^3 - 2(ijm)^3.(kln)^3 + (ijl)^3.(kmn)^3 \\ &\quad - (ijk)^3.(lmn)^3 + (kli)^3.(jmn)^3 - (klj)^3 - (imn)^3 = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que c'est la somme des équations, prises avec des signes convenables, des deux surfaces $S^{2,3}_{il} \equiv S^{2,3}_{IK,JN,KM}$ et $S^{2,3}_{jk} \equiv S^{2,3}_{IN,JL,KM}$ qui se coupent suivant la courbe $A_{ik,jl} \equiv A_{IJ,LN}$ ou des deux surfaces

$$S^{2,3}_{ik} \equiv S^{2,3}_{IK,JM,LN} \qquad \text{et} \qquad S^{2,3}_{jl} \equiv S^{2,3}_{IM,JK,LN}$$

qui se coupent suivant la courbe $A_{ik,jl} \equiv A_{KM,LI}$.

Le premier membre de cette équation peut être aussi considéré comme la somme des cubes des termes des deux identités du n° **10** qui correspondent aux droites D_{ij} et D_{kl}, prises avec des signes tels que, dans la somme, les polynomes $(ijm)(kln)$ et $(ijn)(klm)$, communs à ces deux identités, auront le coefficient 2. Cela posé, en remarquant que

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha),$$

nous pourrons écrire l'équation précédente sous la forme

$$\begin{aligned} &3[(ijn)(klm) - (ijm)(kln)] \\ &\quad \times \{[(ijn)(klm) + (ijl)(kmn)].[(ijn)(klm) - (ijk)(lmn)] \\ &\qquad + [(ijn)(klm) + (kli)(jmn)].[(ijn)(klm) - (klj)(imn)]\} = 0. \end{aligned}$$

ou, symboliquement, soit sous la forme

$$3S^2_{ij,kl,mn}(S^2_{ij,km,ln}\cdot S^2_{ij,lm,kn}+S^2_{kl,im,jn}\cdot S^2_{kl,in,jm})=0,$$

soit sous la forme

$$3\,.\,S^2_{IJ}\,.\,(S^2_{MN}\cdot S^2_{KJ}+S^2_{KN}\cdot S^2_{LM})=0,$$

$S^2_{IJ}\equiv S^2_{ij,kl,mn}$ étant le polynome qui, égalé à zéro, représente la surface $S^2_{IJ}\equiv S^2_{ij,kl,mn}$.

L'équation de la surface du sixième degré

$$\Sigma^{2,3}_{ij,kl}=\Sigma^{2,3}_{KM,LN}$$

étant mise sous cette forme, on voit que cette surface se compose de la surface du second degré $S^{2,3}_{ij,kl,mn}\equiv S^{2,3}_{IJ}$ et d'une surface du quatrième degré qui contient les quatre biquadratiques C_{KLM}, C_{LMN}, C_{MNK}, C_{NKL}, a pour points doubles le couple des points $P_{KL,MN}$ (n° **8**) et passe par les deux courbes du seizième degré $K_{ik,jl}\equiv K_{IJ,KM}$ et $K_{il,jk}\equiv K_{IJ,LN}$ (n° **28**).

30. Les propriétés des quinze surfaces $S^{2,3}$ et des quarante-cinq surfaces $\Sigma^{2,3}$ du sixième degré, étudiées aux n^{os} **27**, **28** et **29**, sont évidemment semblables à celles des surfaces du deuxième degré S^2 et Σ^2 que nous avons vues aux n^{os} **3**, **4**, **6** et **7**; mais, dans cette nouvelle configuration, chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé, suivant une quelconque des manières possibles, par un des indices I, II, III, IV, V, VI, et réciproquement.

Nous allons voir maintenant que, après un tel remplacement des indices, la configuration des surfaces du sixième degré $S^{2,3}$ et $\Sigma^{2,3}$ aura de même toutes les autres propriétés analogues à celles de la configuration des surfaces de deuxième degré S^2 et Σ^2, qui sont les conséquences des identités des n^{os} **10** et **11** et que nous avons vues aux n^{os} **8**, **17**, **18**, **19**, **20**, **21**, **22** et **25**.

En effet, il y a dix polynomes du sixième degré $F^3_{(ijk)(lmn)}\equiv F^3_{(ILM)(JKN)}$ correspondant aux dix polynomes du deuxième degré

$$(ijk)(lmn)\equiv(ILM)(JKN).$$

Le polynome

$$
\begin{aligned}
F^3_{(ijk)(lmn)} = F^3_{(ILM)(JKN)} = 3(ijk)^3.(lmn)^3 &- (ijl)^3.(kmn)^3 \\
&+ (ijm)^3.(kln)^3 - (ijn)^3.(klm)^3 \\
&+ (ikl)^3.(jmn)^3 - (ikm)^3.(jln)^3 \\
&+ (ikn)^3.(jlm)^3 - (jkl)^3.(imn)^3 \\
&+ (jkm)^3.(iln)^3 - (jkn)^3.(ilm)^3,
\end{aligned}
$$

qui correspond au polynome du deuxième degré

$$(ijk)(lmn) = (ILM)(JKN),$$

est la somme des cubes des termes des trois identités du n° **10** qui correspondent aux droites D_{ij}, D_{jk}, D_{ki}, ou des trois identités qui correspondent aux trois droites D_{lm}, D_{mn}, D_{nl}, prises avec des signes tels que le polynome $(ijk)^3.(lmn)^3$ ait, dans la somme, le coefficient 3 et les indices i, j, k, l, m, n, suivant la même disposition que dans le symbole $F^3_{(ijk)(lmn)}$. Cela posé, il s'ensuit que chacun des dix polynomes du sixième degré F^3 est, par son symbole $F^3_{(ijk)(lmn)}$, déterminé non seulement en valeur absolue, mais encore au signe près. Donc, pour les polynomes du second degré $(ijk)(lmn)$ de même que pour les polynomes correspondants du sixième degré $F^3_{(ijk)(lmn)}$, la permutation de deux indices i, j, trouvés dans la même parenthèse, change le signe du polynome et la permutation des deux parenthèses ne le change pas.

De même par l'autre symbole $F^3_{(ILM)(JKN)}$ on peut aussi déterminer, au signe près, le polynome représenté par ce symbole. Il suffit, en effet, de fixer, au signe près, une des correspondances du n° **4**, par exemple $(123)(456) = (IIV\,V)(III\,VI)$ et de remarquer que, si $S^2_{IJ} = S^2_{ij,kl,mn}$, la permutation des indices I et J équivaut aux permutations des indices i et j, k et l, m et n, et de même la permutation des indices i et j équivaut aux permutations des indices I et J, K et L, M et N, si $D_{ij} = D_{IJ,KL,MN}$.

Cela remarqué, nous verrons que, au contraire, le polynome $F^3_{(IKM)(JKN)}$ change le signe si l'on permute ces deux parenthèses et ne

le change pas si l'on permute deux indices, I et L par exemple, trouvés dans la même parenthèse.

31. Les dix polynomes $F^3_{(ijk)(lmn)} \equiv F^3_{(ILM)(JKN)}$ pris quatre à quatre, de quinze manières différentes, quand ils ont dans la même parenthèse un même couple d'indices I et J et, par conséquent, si $S_{IJ} \equiv S_{ij,kl,mn}$, n'ont aucun des trois couples des indices i et j, k et l, m et n, dans la même parenthèse, se lient par quinze identités linéaires correspondant aux quinze surfaces $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$.

De ces identités, celle qui correspond à la surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ est

$$F^3_{(IJK)(LMN)} + F^3_{(IJL)(KMN)} + F^3_{(IJM)(KLN)} + F^3_{(IJN)(KLM)} = 0,$$

ou, dans l'autre représentation,

$$F^3_{(ikm)(jln)} + F^3_{(ikn)(jlm)} + F^3_{(ilm)(jkn)} + F^3_{(iln)(jkm)} = 0.$$

On voit donc que la formation de ces identités est parfaitement semblable à celle des identités du n° **10**; mais, dans celles-ci, chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé, suivant une quelconque des manières possibles, par un des indices I, II, III, IV, V, VI, et réciproquement.

De ces identités, comme au n° **11**, nous pouvons former quinze autres identités correspondant aussi aux quinze surfaces du deuxième degré S^2 et contenant chacune six polynomes F^3 dans lesquels un couple d'indices I, J n'entre pas dans la même parenthèse.

32. Si nous égalons à zéro chacun des dix polynomes F^3, nous aurons les équations de dix surfaces du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe. Toutes ces surfaces passent par les quinze couples des points P (n° **8**), et chacune d'elles, par exemple la surface représentée par l'équation $F^3_{(ijk)(lmn)} = 0$, contient les six droites D_{ij}, D_{jk}, D_{ki}, D_{lm}, D_{mn}, D_{nl}.

Cela devient évident si l'on considère que

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

et que, par conséquent, le polynome $F^3_{ijk|lmn|}$, qui est, de deux manières différentes, la somme des cubes des termes des trois identités du n° **10**, peut être écrit soit sous la forme

$$S^2_{ij,kl,mn} \cdot S^2_{ij,km,ln} \cdot S^2_{ij,kn,lm} + S^2_{jk,il,mn} \cdot S^2_{jk,im,ln} \cdot S^2_{jk,in,lm}$$
$$+ S^2_{kl,jl,mn} \cdot S^2_{kl,jm,ln} \cdot S^2_{kl,jn,lm},$$

soit sous la forme

$$S^2_{lm,ij,kn} \cdot S^2_{lm,ik,jn} \cdot S^2_{lm,in,jk} + S^2_{mn,ij,kl} \cdot S^2_{mn,ik,jl} \cdot S^2_{mn,il,jk}$$
$$+ S^2_{ln,ij,km} \cdot S^2_{nl,ik,jm} \cdot S^2_{nl,im,jk},$$

$S^2_{ij,kl,mn}$ étant le polynome qui, égalé à zéro, représente la surface $S^2_{ij,kl,mn}$.

55. On déduit des identités du n° **51** que les dix surfaces $F^3 = 0$, comme les surfaces du second degré qui constituent les dix couples des faces opposées de l'hexacoryphe, prises quatre à quatre de quinze manières différentes, appartiennent à un même réseau et, par conséquent, font une configuration semblable à celle des faces opposées de l'hexacoryphe, mais dans laquelle chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé par un des indices I, II, III, IV, V, VI et réciproquement.

Si maintenant, comme au n° **9**, nous considérons les quinze surfaces du sixième degré qui correspondent aux quinze droites $D_{ij} = D_{IJ,KL,MN}$ et qui sont représentées, par exemple celle qui correspond à la droite

$$D_{ij} = D_{IJ,KL,MN},$$

par les trois équations équivalentes

$$F^3_{IJK|LMN} + F^3_{IJL|KMN} = 0,$$
$$F^3_{IJM|NKL} + F^3_{IJN|MKL} = 0,$$
$$F^3_{KLI|JMN} + F^3_{KLJ|IMN} = 0,$$

ou dans l'autre représentation par les équations

$$F^3_{(ilm)(jkn)} + F^3_{(jkn)(ilm)} = 0,$$
$$F^3_{(iln)(jkm)} + F^3_{(ikm)(jln)} = 0,$$
$$F^3_{(ikl)(jmn)} + F^3_{(imn)(jkl)} = 0;$$

nous verrons aisément que cette surface est la surface $S^{2\ 3}_{ij} \equiv S^{2\ 3}_{IJ,KL,MN}$ du n° **24**, qui correspond à la droite $D_{ij} \equiv D_{IJ,KL,MN}$.

Si de même, comme au n° **9**, dans chacune des $3.15 = 45$ équations précédentes des quinze surfaces $S^{2.3}$, nous changeons le signe de l'un des deux polynomes F^3 qu'elle contient, nous aurons les équations des quarante-cinq surfaces du sixième degré $\Sigma^{2.3}$ du n° **29**.

Cela posé, nous sommes évidemment en mesure de dire que les dix surfaces $F^3_{(ijk)(lmn)} \equiv F^3_{(ILM)(JKN)}$, les quinze surfaces $S^{2\ 3}_{ij} \equiv S^{2.3}_{IJ,KL,MN}$ et les quarante-cinq surfaces $\Sigma^{3.3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2.3}_{KM,LN}$ du sixième degré font une configuration semblable et ayant toutes les propriétés analogues aux propriétés, déduites des identités des n^os^ **10** et **11**, de la configuration formée par les dix couples $F_{(ilm)(jkn)} \equiv F_{(IJK)(LMN)}$ de faces opposées de l'hexacoryphe; les quinze surfaces $S^2_{ij} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ et les quarante-cinq surfaces $\Sigma^2_{IJ,KL} \equiv \Sigma^2_{km,ln}$ du second degré. Il faut remarquer que, dans cette nouvelle configuration des surfaces du sixième degré F^3, $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$, chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé suivant une quelconque des manières possibles par un des indices I, II, III, IV, V, VI, et réciproquement. C. Q. F. D. (n° **30**).

34. Comme de la configuration des surfaces du second degré S^2, Σ^2 et des couples des faces opposées de l'hexacoryphe nous avons formé la configuration des surfaces du sixième degré $S^{2.3}$, $\Sigma^{2.3}$ et F^3, de même de cette dernière configuration nous pouvons former une nouvelle configuration des surfaces du 2.3^e degré, et ainsi de suite on peut former une suite infinie de configurations des surfaces de degrés 2.3^n, semblables et ayant toutes les propriétés analogues aux propriétés de la configuration des surfaces du second degré S^2, Σ^2 et des couples de faces opposées de l'hexacoryphe qui sont conséquences des identités des n^os^ **10** et **11**.

55. Au lieu de prendre les troisièmes puissances des dix polynomes

$$(ijk)(lmu) = (\mathrm{HLM})(\mathrm{JKN})$$

et former les dix polynomes F^3 et puis les polynomes qui représentent les surfaces du sixième degré $S^{2,3}$ et $\Sigma^{2,3}$, nous pouvons évidemment prendre les $(2p+1)^{\text{ièmes}}$ puissances de ces mêmes polynomes

$$(ijk)(lmu) = (\mathrm{HLM})(\mathrm{JKN}).$$

Nous aurons alors une configuration de surfaces du $2.(2p+1)^{\text{ièmes}}$ degré $S^{2(2p+1)}$, $\Sigma^{2(2p+1)}$ et F^{2p+1} ayant toutes les propriétés de la configuration des surfaces du sixième degré $S^{2,3}$, $\Sigma^{2,3}$ et F^3, qui sont conséquences des identités du n° **51**.

Les surfaces de cette configuration auront pour points multiples du $(2p+1)^{\text{ième}}$ ordre les six sommets de l'hexacoryphe; de même les surfaces $S^{2(2p+1)}$ auront les propriétés du n° **23**, mais la configuration des surfaces $S^{2(2p+1)}$, $\Sigma^{2(2p+1)}$, F^{2p+1} n'aura pas les propriétés des surfaces $S^{2,3}$, $\Sigma^{2,3}$ et F^3, qui sont conséquences de l'identité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha).$$

C'est cette identité et les identités des n^{os} **10** et **11** qui nous donnent aussi cette dernière propriété des surfaces $S^{2,3}$ et $\Sigma^{2,3}$.

56. Les points de chacune des quinze surfaces $S_{ij}^{2,3} = S_{\mathrm{IJ,KL,MN}}^{2,3}$ et des quarante-cinq surfaces $\Sigma_{ij\,kl}^{2,3} = \Sigma_{\mathrm{KM,LN}}^{2,3}$ du sixième degré peuvent être associés en couples $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ et les surfaces du second degré qui passent par les six sommets de l'hexacoryphe et par le point P d'une surface $S^{2,3}$ ou $\Sigma^{2,3}$ passent par un autre point de cette surface qui est l'associé P' de P.

Les droites déterminées par les divers couples de points associés $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ de chacune des surfaces $S^{2,3}$ et $\Sigma^{2,3}$ forment une congruence dont toutes les droites rencontrent deux fois la cubique $\mathfrak{z}$ déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe. Chaque droite joignant deux points associés $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ d'une surface $S^{2,3}$ ou $\Sigma^{2,3}$ rencontre cette surface suivant quatre autres points associés en deux couples.

Réciproquement, chaque droite rencontrant deux fois la cubique φ rencontre chacune des soixante surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ suivant trois couples de points associés. Donc, les soixante congruences déterminées par les divers couples de points associés de chacune des soixante surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ se confondent en une seule qui est la congruence, prise trois fois, des droites qui rencontrent suivant deux points la cubique φ déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe.

37. Chaque surface du second degré passant par les six sommets de l'hexacoryphe rencontre chacune des soixante surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ suivant une courbe variable du douzième degré ayant les six sommets de l'hexacoryphe pour points triples. Les points de chacune de ces soixante courbes du douzième degré sont associés en couples et les droites déterminées par les divers couples de ces points sont les génératrices des soixante surfaces réglées du sixième degré ayant pour ligne triple la cubique φ.

Ces soixante surfaces réglées du sixième degré se confondent en une seule, qui est la surface sécante, prise trois fois, quand cette surface sécante du second degré passe par la cubique φ.

Si la surface sécante du second degré passe par une des courbes du quatrième degré situées sur une surface $S^{2.3}$ ou $\Sigma^{2.3}$, elle rencontre cette surface suivant cette courbe du quatrième degré et suivant une courbe du huitième degré ayant pour points doubles les six sommets de l'hexacoryphe.

Les points de chacune de ces deux courbes sont associés en couples. Les droites déterminées par les divers couples de points associés de la courbe du quatrième degré sont les génératrices de la surface du second degré qui passe par cette courbe du quatrième degré et par la cubique φ. De même, les droites déterminées par les divers couples de points associés de la courbe du huitième degré sont les génératrices d'une surface du quatrième degré ayant pour ligne double la cubique φ. Si la surface sécante du second degré rencontre une des surfaces $S^{2.3}$ ou $\Sigma^{2.3}$ suivant trois courbes du quatrième degré, les points de ces courbes seront associés en couples, et les droites déterminées par ces couples de points associés seront les génératrices des trois surfaces du

second degré qui passent par la cubique φ et une de ces trois courbes du quatrième degré.

Les courbes du trente-sixième degré L et A (nos **27** et **28**) et aussi toutes les courbes suivant lesquelles les surfaces $S^{2\cdot 3}$ et $\Sigma^{2\cdot 3}$ se coupent, prises deux à deux, ont évidemment leurs points associés en couples. Si l'une quelconque de ces courbes se compose de plusieurs autres courbes d'un degré moins élevé, les points de ces courbes seront aussi associés en couples. Les droites déterminées par ces couples de points associés sont les génératrices de surfaces réglées d'un degré égal à la moitié du degré de la courbe conduisante.

Il faut remarquer que, de même que les surfaces $S^{2\cdot 3}$ et $\Sigma^{2\cdot 3}$, toute surface du sixième degré représentée par une équation de la forme

$$(\lambda a_1 + \mu b_1)^3 x_1^3 + (\lambda a_2 + \mu b_2)^3 x_2^3 + (\lambda a_3 + \mu b_3)^3 x_3^3$$
$$+ (\lambda a_4 + \mu b_4)^3 x_4^3 + (\lambda a_5 + \mu b_5)^3 x_5^3 + (\lambda a_6 + \mu b_6)^3 x_6^3 = 0,$$

où (n° **16**)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 = 0$$

et

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 = 0,$$

sont les deux identités indépendantes entre elles qui lient les six polynomes $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ et $\lambda : \mu$ un paramètre arbitraire, aura ses points associés en couples tels que les droites déterminées par ces couples de points associés rencontrent, chacune suivant deux points, la cubique φ déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe.

Les propriétés et les configurations que font ces nouvelles surfaces du sixième degré sont des conséquences des identités des nos **10**, **11** et **15**; mais, comme nous n'avons pas étudié les identités du n° **15**, nous n'entrerons pas non plus dans l'étude de ces surfaces.

Sur les cycles des surfaces algébriques;

PAR M. H. POINCARÉ.

Quatrième complément à l'*Analysis Situs*.

§ 1. — Introduction.

Les beaux travaux de M. Picard sur les *Surfaces algébriques* ont mis depuis longtemps en évidence l'importance de la notion des cycles à une, deux ou trois dimensions. J'ai pensé qu'on pourrait appliquer à cette question les principes que j'ai exposés dans l'*Analysis Situs* et ses deux premiers compléments (*Journal de l'École Polytechnique*, Tome du centenaire; *Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo*, t. XIII; *Proceedings of the London mathematical Society*, Vol. XXXII) et j'ai obtenu ainsi certains résultats partiels que j'ai déjà énoncés dans une Note aux *Comptes rendus* et qui viennent compléter, sur certains points, ceux de M. Picard.

Je rappelle qu'étant donné une variété V fermée à p dimensions, je trace sur cette variété d'autres variétés, fermées ou non, d'un moins grand nombre de dimensions; je désigne par W_q une variété à q dimensions tracée de la sorte sur V.

Si ΣW_q est un ensemble de variétés à q dimensions et ΣW_{q-1} un

ensemble de variétés à $q-1$ dimensions, la congruence

$$\Sigma W_q \equiv \Sigma W_{q-1}$$

signifie (par définition) que ΣW_{q-1} forme la frontière complète de l'ensemble de variétés ΣW_q. J'exprime le même fait sans mettre en évidence ΣW_q en écrivant la relation

$$\Sigma W_{q-1} \sim 0$$

que j'appelle *une homologie*.

Alors la congruence

$$\Sigma W_q \equiv 0$$

signifiera que la variété ΣW_q est fermée.

Si l'on a $\Sigma W_q \equiv 0$ sans avoir $\Sigma W_q \sim 0$ (ou $n\Sigma W_q \sim 0$, n étant entier), je dirai que la variété ΣW_q constitue un cycle à q dimensions.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique quelconque, qui définira une variété V à quatre dimensions. A chaque valeur de y correspondra une surface de Riemann qui sera en général de genre p. Je supposerai que le genre ne s'abaisse ni pour $y = 0$, ni pour $y = \infty$, mais qu'il s'abaisse pour q points singuliers.

$$y = A_1, \qquad y = A_2, \qquad \ldots, \qquad y = A_q.$$

Dans le plan des y, je tracerai q coupures OA_1, OA_2, ..., OA_q. Soit S l'une des surfaces de Riemann; quand y variera *sans franchir les coupures*, la surface S variera, mais en restant homéomorphe à elle-même de façon que les diverses surfaces de Riemann se correspondent point par point et d'une manière biunivoque et continue.

L'une quelconque S de ces surfaces pourra être subdivisée en un polyèdre P; soient F les faces, B les arêtes, C les sommets de ce

polyèdre. Une autre surface S′, correspondant point par point à la surface S, se trouvera de même subdivisée en un polyèdre P′ dont les faces, les arêtes et les sommets correspondront aux faces, aux arêtes et aux sommets du polyèdre P.

Supposons maintenant que y, partant d'un point situé infiniment près de l'une des coupures, décrive un contour presque fermé et aboutisse à un autre point situé infiniment près du point initial, *mais de l'autre côté de la coupure*. La surface S se sera transformée en une surface infiniment peu différente; mais à un point de la première surface correspondra, en général, un point de la seconde surface qui en différera beaucoup.

Le polyèdre P se sera ainsi transformé en un polyèdre P′ très différent.

D'un autre côté, aux différents points du plan des y découpé par nos coupures, nous pouvons faire correspondre les points d'un polygone Q à $2q$ côtés $\alpha_i\beta_i$ et $\alpha_i\beta_{i+1}$, les côtés $\alpha_i\beta_i$ et $\alpha_i\beta_{i+1}$ correspondant aux deux lèvres de la coupure OA_i, le point α_i à A_i, les points β_i et β_{i+1} à O. Inutile d'ajouter que j'écrirai indifféremment β_1 ou β_{q+1}, β_2 ou β_{q+2}, etc., de façon à conserver la symétrie des notations.

Nous allons tirer de là une subdivision de la variété V en un polyèdre H à quatre dimensions.

A chaque face F_i de P correspondra une hypercase de R que j'appellerai aussi F_i. A chaque arête B_i de P correspondra une case B_i de H; de même à chacun des côtés $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}$ de Q combiné avec chacune des faces F_k de P correspondra une case $\alpha_i\beta_iF_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$ de H.

A chaque sommet C_i de P correspond une face C_i de H. A chaque sommet α_i ou β_i de Q, combiné avec chacune des faces F_k de P, correspondra une face α_iF_k ou β_iF_k de H. A chaque côté $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}$ de Q, combiné avec chacune des arêtes B_k de P, correspondra une face $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}B_k$ de H.

A chaque sommet C_k de P combiné avec chacun des côtés $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}$ de H correspondra une arête $\alpha_i\beta_iC_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}C_k$ de H. A chaque sommet α_i ou β_i de Q combiné avec chacune des arêtes B_k de P correspondra une arête $\alpha_i\beta_k$ ou β_iB_k de H.

Enfin, à chaque sommet α_i ou β_i de Q combiné avec chacun des sommets C_k de P correspondra un sommet α_iC_k ou β_iC_k de H.

Mais il convient de faire plusieurs observations. D'abord pour $y = A_i$, le polyèdre P dégénère de telle façon que certaines de ses faces disparaissent; si, par exemple, la face F_k disparaît pour $y = A_i$, la face correspondante $\alpha_i F_k$ du polyèdre H n'existera pas.

De même, bien que cela puisse être évité, on pourrait concevoir qu'une arête B_k disparût pour $y = A_i$; dans ce cas, l'arête $\alpha_i B_k$ n'existerait pas.

D'un autre côté, donnons à i une valeur déterminée et faisons prendre à l'indice k toutes les valeurs possibles; envisageons ensuite, d'une part l'ensemble des cases $\alpha_i \beta_i F_k$ et, d'autre part, l'ensemble des cases $\alpha_i \beta_{i+1} F_k$.

Ces deux ensembles seront identiques, bien qu'en général la case $\alpha_i \beta_i F_k$ considérée à part ne soit pas identique à la case $\alpha_i \beta_{i+1} F_k$, ni même à une autre case $\alpha_i \beta_{i+1} F_l$.

Il pourra se faire aussi que certaines des faces $\alpha_i \beta_i B$ soient identiques à certaines des faces $\alpha_i \beta_{i+1} B$, ou certaines des arêtes $\alpha_i \beta_i C$ à certaines des arêtes $\alpha_i \beta_{i+1} C$.

D'autre part, comparons les différentes faces $\beta_i F_k$; la surface de Riemann S_0 qui correspond au point O se trouvera subdivisée en polyèdre de q manières différentes, suivant que l'on considère le point O comme correspondant au sommet β_1, ou à β_2, ..., ou à β_q. Ce sont ces q modes de subdivision qui engendrent les faces βF. Si donc m est le nombre des faces de P, on aura les identités

$$(2) \qquad \beta_i F_1 + \beta_i F_2 + \ldots + \beta_i F_m = \beta_j F_1 + \beta_j F_2 + \ldots + \beta_j F_m$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, q).$$

Il pourra se faire que certaines des faces βF soient identiques entre elles. Mais cela n'arrivera pas toujours. Il pourra arriver également que certaines des arêtes βB, ou certains des sommets βC soient identiques.

Enfin, par suite de la dégénérescence de P pour $y = A_i$, il pourra se faire que certaines des faces $\alpha_i F$, ou des arêtes $\alpha_i B$, ou des sommets $\alpha_i C$ soient identiques.

En résumé, nos variétés partielles, hypercases, cases, arêtes ou

sommets peuvent se répartir en quatre catégories conformément au Tableau suivant :

Nature de la variété.	Catégorie 1.	$\alpha\beta$.	α.	β.
Hypercases.....	F_k	»	»	»
Cases.....	B_k	$\alpha_i\beta_i F_k$, $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$	»	»
Faces.....	C_k	$\alpha_i\beta_i B_k$, $\alpha_i\beta_{i+1} B_k$	$\alpha_i F_k$	$\beta_i F_k$
Arêtes.....	»	$\alpha_i\beta_i C_k$, $\alpha_i\beta_{i-1} C_k$	$\alpha_i B_k$	$\beta_i B_k$
Sommets.....	»	»	$\alpha_i C_k$	$\beta_i C_k$

Il ne peut y avoir identité entre deux variétés de catégorie différente. Deux variétés de la catégorie 1 sont toujours distinctes.

Entre deux variétés de catégorie $\alpha\beta$, il ne peut y avoir identité que si l'indice i de α est le même (sans quoi les valeurs correspondantes de y seraient sur deux coupures OA_i, OA_j différentes); l'indice de β devra, au contraire, être différent; il peut y avoir identité, par exemple, entre $\alpha_i\beta_i F_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} F_h$, mais pas entre $\alpha_i\beta_i F_k$ et $\alpha_i\beta_i F_h$. Deux variétés de la catégorie α ne pourront être identiques que si l'indice de α est le même.

Avant d'aller plus loin, nous allons modifier un peu nos conventions, afin d'éviter les inconvénients qui pourraient résulter des identités telles que (2) qui ont lieu entre deux sommes de faces, bien que les faces prises individuellement ne soient pas identiques deux à deux.

Soit M un point quelconque de la coupure OA_i, la surface de Riemann S correspondante pourra être décomposée de deux manières en polyèdre, selon que l'on envisagera le point M comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux lèvres de la coupure. Superposons les deux modes de subdivision, en considérant à la fois les arêtes provenant de l'un et de l'autre mode. Nous obtiendrons ainsi un certain polyèdre que j'appellerai P′ ; on peut s'arranger pour qu'il reste homéomorphe à lui-même quand le point M décrira toute la coupure OA_i (*vide infra*, § 3).

J'appellerai F'_k, B'_k, C'_k les faces, arêtes et sommets de P′. Chacune des faces F du premier mode de subdivision se décomposera en un certain nombre de faces F′, et il en sera de même de chacune des

faces F du second mode; de sorte que chaque face F″ appartiendra à l'une des faces F du premier mode, et à une seule, et à une des faces F du second mode, et à une seule.

Chacune des arêtes B de chacun des deux modes de subdivision se décomposera en un certain nombre d'arêtes B″. Chaque arête B appartiendra au moins à l'une des arêtes B de l'un des deux modes, et peut-être à une arête de chaque mode; mais, dans aucun cas, elle n'appartiendra à deux arêtes différentes du même mode.

Enfin, les sommets C″ seront les sommets C des deux modes, auxquels il faut adjoindre les points d'intersection des arêtes du premier mode avec celles du second.

De même nous avons vu que la surface S_0 qui correspond au point O se trouve décomposée en polyèdre de q manières différentes. Superposons les q modes de subdivision; nous obtiendrons un polyèdre P″ dont les faces, les arêtes et les sommets s'appelleront F''_k, B''_k, C''_k. Chacune des faces F correspondant à l'un des q modes, de même que chacune des faces F″ correspondant au polyèdre P''_i, que l'on obtient en regardant le point O comme appartenant à la coupure OA_i, se trouvera décomposée en un certain nombre de faces F″. Chaque face F″ appartiendra à l'une des faces F″ du polyèdre P''_i, et à une seule; à l'une des faces F de chacun des q modes de subdivision, et à une seule.

Chacune des arêtes B des q modes, chacune des arêtes B des divers polyèdres P''_i se décomposera en un certain nombre d'arêtes B″. Chaque arête B″ appartiendra à l'une des arêtes B de l'un des q modes, et à l'une des arêtes B″ de l'un des polyèdres P''_i; elle pourra appartenir à la fois à deux arêtes de deux modes différents, ou à deux arêtes B″ de deux polyèdres P″ différents, mais pas à deux arêtes B du même mode ou à deux arêtes B″ du même polyèdre.

Les sommets C″ se composeront des sommets des q modes auxquels il faut adjoindre les points d'intersection des arêtes B appartenant à des modes différents.

Rien à changer en ce qui concerne les variétés de la catégorie I; passons à la catégorie $\alpha\beta$. Chacune des cases $\alpha_i\beta_i F_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$ va se trouver décomposée en cases partielles $\alpha_i\beta_i F''_k$, $\alpha_i\beta_{i+1} F''_k$; de même, chacune des faces $\alpha\beta B$ sera décomposée en faces $\alpha\beta B''$. Aux arêtes $\alpha\beta C$

viendront s'adjoindre d'autres arêtes correspondant, comme nous l'avons vu plus haut, aux intersections de deux arêtes B appartenant à des modes différents. L'ensemble de ces arêtes constituera ce que j'appellerai les arêtes $\alpha\beta C'$.

On voit que les cases $\alpha_i\beta_i F'_k$ sont identiques aux cases $\alpha_i\beta_{i+1} F'_k$; de même pour les faces $\alpha_i\beta_i B'_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} B'_k$ et pour les arêtes $\alpha_i\beta_i C'_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} C'_k$. Mais il importe de remarquer que la case $\alpha_i\beta_i F_k$ se décompose en cases partielles $\alpha_i\beta_i F'$, qui ne sont pas les mêmes, en général, que les cases partielles dans lesquelles se décompose la case $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$. La même observation s'applique aux faces $\alpha_i\beta_i B_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} B_k$.

Passons à la catégorie α. Quand le point M vient en A_i, les deux modes de décomposition de la surface S en polyèdre P se confondent; d'autre part, ce polyèdre dégénère, comme je l'ai dit, de sorte que certaines des variétés $\alpha_i F'_k$, $\alpha_i B'_k$, $\alpha_i C'_k$ pourront disparaître et que certaines pourront se confondre.

Passons à la catégorie β. Nous allons avoir des variétés partielles $\beta_i F'_k$, $\beta_i B'_k$, $\beta_i C'_k$.

Les faces $\beta_1 F'_k$, $\beta_2 F'_k$, ..., $\beta_q F'_k$ seront identiques; mais la face $\beta_1 F_k$ se décompose en faces partielles $\beta F''$, qui ne sont pas les mêmes, en général, que celles dans lesquelles se décomposent la face $\beta_2 F_k$, ou la face $\beta_3 F_k$, etc. Même observation pour les arêtes.

Cela posé, je fais d'abord la remarque suivante :

Une variété de la catégorie α sera toujours homologue à une somme de variétés appartenant à d'autres catégories.

Soit, par exemple, la face $\alpha_i F'_k$; elle appartient à la case $\alpha_i\beta_i F'_k$ qui admet en outre la face $\beta_i F'_k$ et celles des faces $\alpha_i\beta_i B'_k$, qui correspondent à des arêtes B'_k appartenant à la face F'_k du polyèdre P'. Si donc on a la congruence (pour ce polyèdre P')

$$F'_k \equiv \Sigma \varepsilon_q B'_q,$$

les ε_q étant des nombres égaux à $+1$, -1 ou 0, on aura la congruence

$$\alpha_i\beta_i F'_k \equiv \alpha_i F'_k - \beta_i F'_k + \Sigma \varepsilon_q \alpha_i\beta_i B'_q$$

et, par conséquent, l'homologie

$$\alpha_i F'_k \sim \beta_i F'_k - \Sigma \varepsilon_q \alpha_i \beta_i B_q.$$

Les variétés qui figurent dans le second membre de cette homologie appartenant aux catégories β et $\alpha\beta$, le théorème est démontré, et on l'établirait de même pour $\alpha_i B'_k$ et $\alpha_i C'_k$.

§ 2. — Cycles à trois dimensions.

Je passe à la recherche des homologies et congruences entre ces variétés. Je commence par la remarque suivante :

Nous pouvons toujours supposer que nos congruences ne contiennent pas de variété de la catégorie α.

Soit, en effet,

$$\Sigma \alpha_i A + H \equiv 0$$

une congruence où les $\alpha_i A$ sont des variétés à p dimensions de la catégorie α (correspondant à une variété A du polyèdre P ou P'), et H une combinaison de variétés à p dimensions des autres catégories.

Nous aurons alors, sur notre polyèdre P ou P', la congruence

$$A \equiv \Sigma \varepsilon a,$$

où les ε sont des entiers et les a des variétés admettant une dimension de moins que A. On aura alors la congruence

$$\alpha_i \beta_i A \equiv \alpha_i A - \beta_i A + \Sigma \varepsilon \alpha_i \beta_i a,$$

d'où l'homologie

$$\alpha_i A \sim \beta_i A - \Sigma \varepsilon \alpha_i \beta_i a.$$

En combinant cette homologie avec la congruence

$$\Sigma \alpha_i A + H \equiv 0,$$

nous trouvons la congruence

$$\Sigma\beta_i A - \Sigma\Sigma\varepsilon\alpha_i\beta_i a + H \equiv 0,$$

qui ne contient plus de variété de la catégorie α.

C. Q. F. D.

Pour obtenir les homologies entre les cases, il suffit d'envisager celles qui se déduisent des hypercases.

Supposons que, sur le polyèdre P, on ait la congruence

$$F_k \equiv \Sigma\varepsilon_q B_q,$$

les ε étant égaux à $+1$, -1 ou 0; on aura, pour le polyèdre à quatre dimensions, la congruence

$$F_k \equiv \Sigma\varepsilon_q B_q + \Sigma\alpha_i\beta_i F_k - \Sigma\alpha_i\beta_{i+1} F_k.$$

et, par conséquent, l'homologie

$$(1) \qquad \Sigma\varepsilon_q B_q \sim \Sigma\alpha_i\beta_{i+1} F_k - \Sigma\alpha_i\beta_i F_k.$$

Nous rappellerons, d'ailleurs, que $\alpha_i\beta_i F_k$, de même que $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$, peut être remplacé par la somme de plusieurs cases partielles $\alpha_i\beta_i F'$.

D'où une première conséquence ; soit $\Sigma\zeta_q B_q$ une combinaison quelconque des cases B_q, les ζ étant des entiers. Je suppose que, sur le polyèdre P, on ait, entre les arêtes B_q correspondantes, l'homologie

$$\Sigma\zeta_q B_q \sim 0,$$

c'est-à-dire que l'ensemble de ces arêtes (affectées chacune du coefficient ζ_q) forme sur la surface S un cycle fermé susceptible de se réduire à un point par déformation continue.

Alors on aura sur le polyèdre P la congruence

$$\Sigma\zeta_q B_q \equiv \Sigma\theta_k F_k,$$

les θ étant des entiers; on aura alors sur le polyèdre à quatre dimen-

sions, la congruence

$$\Sigma\theta_k F_k \equiv \Sigma\zeta_q B_q + \Sigma\theta_k \alpha_i \beta_i F_k - \Sigma\theta_k \alpha_i \beta_{i+1} F_k,$$

d'où l'homologie

$$\Sigma\zeta_q B_q \sim \Sigma\theta_k \alpha_i \beta_{i+1} F_k - \Sigma\theta_k \alpha_i \beta_i F_k.$$

Si donc une combinaison d'arêtes B *est homologue à zéro sur* P, *la combinaison correspondante de cases* B *sera homologue à une combinaison de cases de la catégorie* $\alpha\beta$.

Cherchons maintenant les congruences entre les cases.

Ces congruences sont de la forme

$$(2) \qquad \Sigma\zeta_q B_q + \Sigma\theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0,$$

les ζ et les θ' étant des entiers. *Je dis d'abord que l'on aura sur le polyèdre* P :

$$\Sigma\zeta_q B_q \equiv 0,$$

c'est-à-dire que l'ensemble des arêtes (affectées des coefficients ζ) *devra former un ou plusieurs cycles sur la surface* S.

Soit, en effet, sur P, la congruence

$$B_q \equiv \Sigma\varepsilon_h C_h.$$

Nous aurons sur notre polyèdre à quatre dimensions la congruence

$$B_q \equiv \Sigma\varepsilon_h C_h + H,$$

H désignant une combinaison de faces n'appartenant pas à la catégorie I. On aura d'autre part

$$\alpha_i \beta_i F'_k \equiv H,$$

H ayant toujours la même signification; on en déduit

$$\Sigma\zeta_q B_q + \Sigma\theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k = \Sigma\zeta_q \varepsilon_h C_h + H,$$

H ayant toujours la même signification.

Comme le second membre doit être identiquement nul, on devra avoir identiquement

$$\Sigma\zeta_q \varepsilon_h C_h = 0.$$

On aura donc sur le polyèdre P

$$(3) \qquad \Sigma\zeta_q B_q = \Sigma\zeta_q \varepsilon_h C_h = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On doit donc avoir en vertu de (2)

$$(4) \qquad \Sigma\theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k = \Sigma\zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \Sigma\zeta_q \alpha_i \beta_i B_q.$$

Soit S(M) ce que devient la surface de Riemann S quand le point y vient en M sur la coupure OA_i. Soit MF'_k la face F'_k du polyèdre P′ correspondant à cette position du point M; soit MP la limite vers laquelle tend le polyèdre P quand le point y se rapproche de M du côté $\alpha_i\beta_i$ de la coupure. Soit (MP) la limite vers laquelle tend ce même polyèdre quand le point y tend vers M du côté $\alpha_i\beta_{i+1}$ de la coupure. Soit MB_q et (MB_q) les arêtes B_q des deux polyèdres MP et (MP).

Si alors nous reprenons la congruence (4) et que, dans chacune des variétés qui y figurent, nous conservions seulement les points qui appartiennent en même temps à S(M), nous aurons une congruence nouvelle

$$(5) \qquad \Sigma\theta' MF'_k = \Sigma\zeta_q (MB_q) - \Sigma\zeta_q MB_q.$$

Les expressions $\Sigma\zeta_q(MB_q)$ et $\Sigma\zeta_q MB_q$ représentent deux cycles tracés sur la surface S(M); soient Ω'_i et Ω_i ces deux cycles. De la congruence (5) on pourra tirer l'homologie

$$(6) \qquad \Omega'_i - \Omega_i \sim 0,$$

qui doit avoir lieu sur la surface S(M).

Supposons que y, partant du point M du côté $\alpha_i\beta_i$ de la coupure, tourne autour du point singulier A_i et revienne au point M de l'autre côté de la coupure. Le cycle $\Sigma\zeta_q B_q$ se déformant d'une manière continue aura pour position initiale $\Sigma\zeta_q MB_q = \Omega_i$ et pour position finale $\Sigma\zeta_q(MB_q) = \Omega'_i$.

L'homologie exprime donc que Ω_i est homologue à son transformé Ω'_i (par la transformation que subissent les cycles de S quand y tourne autour du point singulier A_i). Le cycle $\Sigma\zeta_q B_q$ reste donc homologue à lui-même par suite de cette transformation, et aussi par suite des transformations analogues correspondant aux autres points singuliers. Les cycles qui jouissent de cette propriété pourront s'appeler *cycles invariants*. Nous reviendrons plus loin sur cette notion. Nous voyons qu'à toute congruence de la forme (2) correspond un cycle invariant. *Je dis que, inversement, à tout cycle invariant correspond une congruence de la forme* (2).

Soit en effet $\Sigma\zeta_q B_q$ un cycle invariant. On aura sur S(M)

$$(6) \qquad \Sigma\zeta_q(MB_q) \sim \Sigma\zeta_q MB_q$$

et, par conséquent, on pourra trouver des entiers θ' tels que

$$(5) \qquad \Sigma\theta'_k MF'_k = \Sigma\zeta_q(MB_q) - \Sigma\zeta_q MB_q.$$

On en déduit la congruence

$$\Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i F'_k \equiv \Sigma\zeta_q\alpha_i\beta_{i+1}B_q - \Sigma\zeta_q\alpha_i\beta_i B_q + \Sigma\theta'_k\alpha_i F'_k - \Sigma\theta'_k\beta_i F'_k.$$

Le signe Σ se rapporte ici à l'indice k, l'indice i étant constant; mais de là nous pouvons déduire

$$\Sigma\zeta_q B_q + \Sigma\Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i F'_k \equiv \Sigma\Sigma\theta'_k\alpha_i F'_k - \Sigma\Sigma\theta'_k\beta_i F'_k,$$

le double signe Σ se rapportant alors aux deux indices i et k, car on a évidemment

$$\Sigma\zeta_q B_q \equiv \Sigma\Sigma\zeta_q\alpha_i\beta_i B_q - \Sigma\Sigma\zeta_q\alpha_i\beta_{i+1}B_q.$$

Il nous reste à démontrer que l'on doit avoir

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0, \qquad \Sigma\Sigma \theta'_k \beta_i F'_k = 0.$$

Voyons d'abord ce qui concerne la première de ces égalités.

Reprenons la congruence (5) et faisons tendre le point M vers A_i, à la limite MF'_k se réduira à $\alpha_i F'_k$ et Ω_i se confondra avec Ω'_i et avec $\Sigma \zeta_q \alpha_i B_q$; la congruence (5) deviendra donc

$$(7) \qquad \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k \equiv 0.$$

Examinons la signification de cette congruence. Supposons d'abord que, pour $y = A_i$, la surface S ne se décompose pas, c'est-à-dire que la courbe

$$f(x, A_i, z) = 0$$

soit indécomposable. Alors la congruence ne peut avoir lieu que dans deux hypothèses : ou bien on a l'identité

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0,$$

je veux dire que dans le premier membre ne pourront figurer (avec un coefficient θ' différent de zéro) que les faces $\alpha_i F'_k$ qui disparaissent par suite de la dégénérescence du polyèdre P'_i, ainsi que je l'ai expliqué plus haut.

Ou bien la combinaison $\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k$ représentera (une ou plusieurs fois) la surface de Riemann tout entière; de sorte que

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = nS.$$

Mais pour la surface S correspondant au point M, nous pouvons écrire

$$S = \Sigma M F'_k,$$

puisque l'ensemble des faces F'_k du polyèdre P'_i doit recouvrir la surface S tout entière.

On a d'ailleurs

$$\Sigma M P'_k \equiv 0.$$

Nous aurons donc la congruence

$$(5\ bis)\qquad \Sigma(\theta'_k - n)MF'_k = \Omega_i - \Omega_i,$$

et, d'autre part, quand M vient en A_i,

$$\Sigma\alpha_i F'_k = S,$$

et par conséquent

$$\Sigma(\theta'_k - n)\alpha_i F'_k = 0.$$

La seconde hypothèse est ainsi ramenée à la première; il suffit pour cela de changer θ'_k en $\theta'_k - n$, ce qui est permis puisque la congruence (5) se trouve ainsi remplacée par une congruence (5 *bis*) de même forme.

Supposons maintenant que la courbe $F(x, A_i, z)$ se décompose et, par exemple, que la surface de Riemann correspondante se décompose en deux surfaces partielles S_1 et S_2.

Alors notre congruence (7) pourra avoir lieu pourvu que l'on ait

$$\Sigma\theta'_k\alpha_i F'_k = n_1 S_1 + n_2 S_2,$$

n_1 et n_2 étant des entiers. C'est du moins ce que l'on pourrait craindre, mais on peut de plusieurs manières voir qu'il n'en sera pas ainsi.

Le plus simple est de raisonner comme il suit :

Partons de la surface de Riemann S_0 qui correspond au point O; faisons varier y d'une façon continue de O à A_i en suivant la coupure OA_i; la surface de Riemann S se déformera d'une manière continue et en restant homéomorphe à elle-même. Soit S(M) la surface S correspondant au point M. A chaque point de S(M) on peut faire correspondre un point de S_0 puisqu'on peut passer de S(M) à S_0 par déformation continue. Considérons sur S(M) les deux cycles Ω_i et Ω'_i, à ces deux cycles correspondront sur S_0 deux cycles fermés que j'appellerai U_i et U'_i.

Quand le point M parcourra OA_i d'un mouvement continu, les deux cycles U_i et U'_i se déplaceront d'un mouvement continu sur la surface S_0. Quand M est très voisin de A_i, les deux cycles Ω_i et Ω'_i et,

par conséquent, les deux cycles U_i et U'_i sont très voisins l'un de l'autre. Quand le point M vient en O, les deux cycles Ω_i et U_i deviennent identiques et se réduisent à

$$\Sigma \zeta_q \beta_i B_q = \Omega_i^0;$$

les deux cycles Ω'_i et U'_i deviennent identiques et se réduisent à

$$\Sigma \zeta_q \beta_{i+1} B_q = \Omega_{i+1}^0.$$

Supposons que le point M varie depuis A_i jusqu'à un certain point M_0 de la coupure OA_i; les deux cycles U_i et U'_i, d'abord confondus, se sépareront et balayeront une certaine région R de S_0; à cette région correspondra sur $S(M_0)$ une certaine région qui sera formée d'un certain nombre de faces d'un polyèdre P'_i correspondant, puisqu'elle est limitée par les deux cycles Ω_i et Ω'_i qui sont formés d'arêtes de ce polyèdre. Nous pourrons écrire la congruence

$$(5) \qquad \Sigma \theta'_k M F'_k \equiv \Omega'_i - \Omega_i,$$

où $\Sigma \theta'_k M_0 F'_k$ représentera précisément la région que nous venons de définir.

Cette région se réduisant à zéro quand M vient en A_i, nous aurons, dans tous les cas,

$$(8) \qquad \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0.$$

Nous allons montrer maintenant que

$$\Sigma\Sigma \theta'_k \beta_i F'_k = 0,$$

et pour cela nous allons étudier la somme

$$\Sigma \theta'_k \beta_i F'_k.$$

D'après ce qui précède, ce n'est pas autre chose que la région balayée sur la surface S_0 par les deux cycles U_i et U'_i, quand le point M varie de A_i à O; elle est limitée par les deux cycles Ω_i^0 et Ω_{i+1}^0.

On voit que nous aurons

$$\begin{aligned}
\Sigma\theta'_k\beta_1 F'_k &\equiv \Omega^0_2 - \Omega^0_1,\\
\Sigma\theta'_k\beta_2 F'_k &\equiv \Omega^0_3 - \Omega^0_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Sigma\theta'_k\beta_q F'_k &\equiv \Omega^0_1 - \Omega^0_q,
\end{aligned}$$

d'où en additionnant

$$\Sigma\Sigma\theta'_k\beta_i F'_k \equiv 0.$$

Cette congruence nous montre que la combinaison $\Sigma\Sigma\theta'_k\beta_i F'_k$ se réduit à zéro ou à un certain nombre de fois la surface S_0.

Cherchons si cette dernière hypothèse peut se présenter. Supposons que y décrive un contour fermé en restant infiniment près des coupures OA_i, décrivant d'abord l'une des lèvres de OA_1, puis l'autre lèvre, puis les deux lèvres de OA_2, et ainsi de suite, puis enfin les deux lèvres de OA_q. Considérons un cycle sur la surface de Riemann correspondante: ce cycle se confondra d'abord avec Ω^0_1 quand y sera en O sur la première lèvre de OA_1; quand y décrira la première lèvre de OA_1, ce cycle se déformera d'une manière continue, ce sera notre cycle Ω_1 et les points correspondants sur S_0 formeront le cycle U_1; quand le point y reviendra de A_1 en O par la seconde lèvre, ce cycle ne sera autre chose que notre cycle Ω'_1, et les points correspondants sur S_0 formeront le cycle U'_1; quand y sera revenu en O, ce cycle se confondra avec Ω^0_2; quand y décrira les deux lèvres de OA_2, le cycle se fondra d'abord avec Ω_2 puis avec Ω'_2, et les points correspondants sur S_0 formeront le cycle U_2, puis le cycle U'_2, et ainsi de suite. Il s'agit de savoir si ce cycle mobile, qui se confond successivement avec U_1, avec U'_1, U_2, U'_2, ..., U_q, U'_q et, dans sa position initiale comme dans sa position finale, se confond avec Ω^0_1, a décrit la surface S_0 tout entière.

Pour nous en rendre compte, il faut que nous voyions pourquoi ces cycles se déforment.

Considérons l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

où y sera regardé comme une constante; les points singuliers de z regardé comme fonction de x seront donnés par l'équation

$$\frac{df}{dz} = 0.$$

Considérons un cycle tracé sur la surface de Riemann. A ce cycle correspondra sur le plan des x un certain contour qui enveloppera un certain nombre de ces points singuliers. Quand y variera, ces points singuliers se déplaceront, et si nous ne voulons pas que le cycle passe par un de ces points singuliers, il faudra le déformer pour le faire fuir devant ces points singuliers mobiles. Quels que soient les déplacements de ces points singuliers, pourvu que deux d'entre eux ne viennent pas se confondre, il sera toujours possible de déformer continuellement le cycle de façon qu'il ne passe jamais par aucun de ces points; on pourra même choisir un certain nombre de points fixes et déformer le cycle de façon qu'il ne passe jamais par aucun de ces points singuliers ni par aucun des points fixes, pourvu que ces points singuliers ne se confondent jamais ni entre eux, ni avec les points fixes.

Quand y va varier, les points singuliers se déplaceront, et les points correspondants sur S_0 se déplaceront également. Ils ne pourraient se confondre que si y venait en un des points A_i, mais nous faisons tourner y autour de ces points, en en approchant très près, mais sans les atteindre. D'autre part, ces points vont décrire des lignes, et nous pourrons trouver sur S_0 une région ρ qui ne sera traversée par aucune de ces lignes. Ce seront les points de cette région ρ qui joueront le rôle des points fixes dont je parlais tout à l'heure. Alors nous pourrons déformer notre cycle de façon que, sans passer jamais par un des points singuliers, il ne pénètre jamais dans la région ρ. Il ne peut donc engendrer la surface S_0 tout entière. L'hypothèse en question doit être rejetée, de sorte que l'on aura toujours l'identité

$$\Sigma\Sigma\theta'_k\beta_i F'_k = 0. \tag{9}$$

Pour terminer nous devons remarquer qu'*il ne peut pas y avoir de congruences entre des cases de la catégorie $\alpha\beta$ seulement.* Soit, en effet,

$$\Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i F'_k \equiv 0$$

une pareille congruence; nous trouverons d'abord

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma \theta'_k \varepsilon'_h \alpha_i \beta_i B'_h + \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k - \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k;$$

de sorte qu'on aura

$$\Sigma \theta'_k \varepsilon'_h \alpha_i \beta_i B'_h = 0, \qquad \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0, \qquad \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k = 0,$$

et, par conséquent, sur le polyèdre P'_i (en raisonnant comme nous avons fait pour déduire 5 de 4),

$$\Sigma \theta'_k MF'_k \equiv 0.$$

L'ensemble des faces MF'_k (affectés des coefficients numériques θ'_k) du polyèdre P'_i doit donc être congru à zéro, c'est-à-dire former une surface fermée qui ne peut être que la surface de $S(M)$ tout entière. L'ensemble $\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k$ représentera alors la surface $S(A_i)$ tout entière; on ne pourra donc pas avoir

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0.$$

Donc *notre congruence est impossible.*

Nous savons que, pour obtenir tous les cycles à trois dimensions, il suffit de chercher les combinaisons de cases qui sont congrues à zéro sans être homologues à zéro.

D'abord, une pareille combinaison doit contenir des cases de la catégorie 1, nous venons de le voir; soit $\Sigma \zeta_q B_q$ l'ensemble de ces cases; l'ensemble des arêtes correspondantes doit former un cycle sur la surface S (c'est le cycle Ω_i). Ce cycle ne doit pas être homologue à zéro. Si, en effet, ce cycle était homologue à zéro, la combinaison $\Sigma \zeta_q B_q$ serait homologue à une combinaison de cases de la catégorie $\alpha\beta$; on pourrait donc remplacer $\Sigma \zeta_q B_q$ par cette combinaison dans le premier membre de notre congruence; ce premier membre ne contiendrait plus alors que des cases de la catégorie $\alpha\beta$, ce qui est impossible d'après ce que nous venons de voir.

Enfin, notre cycle Ω_i doit être *invariant*, c'est-à-dire qu'il doit se

changer en un cycle homologue Ω'_i quand y tourne autour de A_i. Mais quand y tourne autour de l'un des points singuliers A_i, les cycles de la surface de Riemann subissent une des substitutions du *groupe de Picard*. Le cycle Ω_i doit donc être invariant pour le groupe de Picard.

Ainsi, à tout cycle à trois dimensions de V correspond un cycle de la surface S, invariant pour le groupe de Picard.

Réciproquement, considérons un cycle invariant pour le groupe de Picard. Si Ω_i est une position de ce cycle sur le polyèdre P'_i, et si Ω'_i est ce que devient Ω_i quand y a tourné autour de A_i, on aura

$$\Omega_i \sim \Omega'_i.$$

On pourra trouver des entiers θ' de façon à satisfaire à la congruence (5). La congruence (4) aura également lieu. Mais nous venons de voir que dans ces conditions les identités (8) et (9) ont lieu, de sorte que la congruence (4) peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i F'_k \equiv \Sigma\zeta_q\alpha_i\beta_{i+1}B_q - \Sigma\zeta_q\alpha_i\beta_i B_q,$$

d'où

$$\Sigma\zeta_q B_q + \Sigma\Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i F'_k \equiv 0.$$

Le premier membre de cette congruence représente un cycle à trois dimensions.

En résumé, autant le groupe de Picard admettra de cycles invariants distincts, autant la variété V *admettra de cycles distincts à trois dimensions.*

La meilleure manière de se représenter ces cycles à trois dimensions, c'est de supposer que l'on n'a pas seulement

$$\Omega_i \sim \Omega'_i,$$

mais identiquement

$$\Omega_i = \Omega'_i;$$

c'est une supposition que nous pouvons toujours faire, à cause de la

façon arbitraire dont on peut faire correspondre point par point nos surfaces de Riemann.

Dans ces conditions, on donnera à y toutes les valeurs possibles.

A chaque valeur correspondra une position du cycle Ω_i, et, à cause de l'invariance de ce cycle, *à deux points infiniment voisins situés de part et d'autre d'une des coupures correspondront deux positions infinies peu différentes du cycle* Ω_i.

Les diverses positions de ce cycle engendreront donc un cycle fermé à trois dimensions.

§ 3. — Cycles à deux dimensions.

Pour trouver tous les cycles à deux dimensions, il suffit de chercher toutes les combinaisons de faces qui sont congrues à zéro sans être homologues à zéro.

Nous pouvons d'abord supposer que cette combinaison ne contient pas de face de la catégorie α; car, d'après ce que nous avons établi au début du paragraphe précédent, toute face de la catégorie α est homologue à des faces des catégories $\alpha\beta$ et β.

Il s'agit maintenant de chercher si ces combinaisons peuvent contenir des faces de la catégorie 1. J'observe d'abord ceci : soient C_1 et C_2 deux sommets quelconques du polyèdre P; on pourra toujours passer de l'un à l'autre en suivant certaines arêtes de ce polyèdre, de sorte que nous aurons sur ce polyèdre la congruence

$$C_1 - C_2 = \Sigma \zeta_q B_q,$$

le second membre représentant l'ensemble des arêtes par lesquelles on passe de C_1 à C_2; plus généralement on pourra trouver des entiers ζ tels que

$$(1) \qquad \Sigma \varepsilon_k C_k = \Sigma \zeta_q B_q,$$

pourvu que les ε soient des entiers tels que

$$\Sigma \varepsilon_k = 0;$$

car alors $\Sigma \varepsilon_k C_k$ pourra être regardé comme une somme de différences telles que $C_1 - C_2$.

Considérons alors sur la variété V la combinaison de faces $\Sigma \varepsilon_k C_k$, et supposons $\Sigma \varepsilon_k = 0$. Nous pourrons alors trouver des entiers ζ satisfaisant à la congruence (1); il viendra alors sur la variété V

$$\Sigma \zeta_q B_q \equiv \Sigma \varepsilon_k C_k + \Sigma \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q - \Sigma \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma \varepsilon_k C_k \sim \Sigma \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \Sigma \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q,$$

ce qui montre que la combinaison $\Sigma \varepsilon_k C_k$ est homologue à une combinaison de faces de la catégorie $\alpha\beta$.

Supposons maintenant que l'on ait une congruence de la forme

$$\Sigma \varepsilon_k C_k + H = 0,$$

H représentant une combinaison de faces des catégories $\alpha\beta$ et β. Si l'on a $\Sigma \varepsilon_k = 0$, on peut remplacer dans le premier membre $\Sigma \varepsilon_k C_k$ par la combinaison de faces des catégories de β et $\alpha\beta$ qui lui est homologue; et alors ce premier membre ne contient plus de faces de la catégorie 1.

Si maintenant nous avions deux congruences de la même forme

$$\Sigma \varepsilon_k C_k + H \equiv 0, \qquad \Sigma \varepsilon'_k C_k + H' \equiv 0,$$

nous pourrions trouver deux entiers n et n' tels que

$$n \Sigma \varepsilon_k + n' \Sigma \varepsilon'_k = 0,$$

et alors la congruence

$$\Sigma (n \varepsilon_k + n' \varepsilon'_k) C_k + n H + n' H' \equiv 0,$$

qui est une combinaison des deux précédentes, pourrait être ramenée à ne plus contenir de faces de la catégorie 1.

En résumé, s'il y a des congruences contenant des faces de la catégorie (1), *il ne peut y en avoir deux distinctes.*

Envisageons donc spécialement les congruences où ne figurent que des faces des catégories β et $\alpha\beta$. Soit

$$(2) \qquad \Sigma\theta'_k\,\alpha_i\beta_i B'_k + \Sigma\theta''_k\,\beta_i F''_k \equiv 0$$

une de ces congruences.

Considérons les points communs aux variétés qui figurent dans cette congruence et à la surface $S(M)$; réduisons chacune de ces variétés à ces points communs, il viendra

$$(3) \qquad \Sigma\theta'_k\,MB'_k \equiv 0.$$

En effet, le point M étant un point de la coupure OA_i, différent de O, la surface $S(M)$ n'a aucun point commun avec les faces de la catégorie β, pour lesquelles y ne peut prendre que la valeur O. De même la surface $S(M)$ n'aura aucun point commun avec les faces $\alpha_j\beta_j B'_k$, où l'indice j est différent de i, puisque pour ces faces y devrait être sur la coupure OA_j, tandis que M est sur la coupure OA_i.

La congruence (3) signifie que, sur la surface $S(M)$, l'ensemble des arêtes B'_k du polyèdre P'_i (affectées des coefficients θ') doit former un cycle fermé; soit K_i ce cycle.

Mais observons que

$$\Sigma\theta'_k\,\alpha_i\beta_i B'_k = \Sigma\theta'_k\,\alpha_i B'_k + H,$$

H étant un ensemble d'arêtes des catégories β et $\alpha\beta$. De même

$$\Sigma\theta''_k\,\beta_i F''_k = H',$$

H' étant une combinaison d'arêtes de la catégorie β.

On a donc

$$\Sigma\theta_k\,\alpha_i\beta_i B_k + \Sigma\theta'_k\,\beta_i F''_k = \Sigma\theta_k\,\alpha_i B_k + H + H',$$

de sorte que la congruence (2) ne peut avoir lieu que si l'on a identiquement

$$(4) \qquad \Sigma \theta'_k \alpha_i B'_k = 0.$$

Comme il n'y a aucune relation entre les arêtes $\theta'_k \alpha_i B'_k$ appartenant à des indices i différents, l'identité (4) doit avoir lieu quand on donne à l'indice i une valeur déterminée et qu'on étend seulement la sommation aux différentes valeurs de l'indice k.

L'identité (4) signifie alors que, quand le point M tend vers A_i, le cycle K_i tend à se réduire à zéro.

En effet, quand M se réduit à A_i, la surface S(M) dégénère et son genre diminue; certains de ces cycles disparaissent donc. Voyons comment ce fait se rattache à l'étude du groupe de Picard. Soit S_i la substitution de ce groupe qui correspond au point singulier A_i; elle changera le cycle ω_k, par exemple, en

$$\omega'_k = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_{2p} \omega_{2p}.$$

Donc, pour $M = A_i$, on aura

$$\omega_k = \omega'_k;$$

ce qui veut dire que, pour $M = A_i$, le cycle $\omega'_k - \omega_k$ disparaît.

Obtiendrons-nous ainsi tous les cycles qui disparaissent pour $M = A_i$ que j'appellerai *cycles évanouissants*?

M. Picard a montré (t. I, p. 82) que toute surface algébrique peut être ramenée par une transformation birationnelle à n'avoir que des singularités ordinaires, c'est-à-dire une courbe double avec des points triples.

Il a ensuite montré (p. 95) comment on détermine, pour une pareille surface, les points singuliers A_i et les substitutions du groupe de Picard qui correspondent à chacun d'eux.

On voit ainsi que, dans ce cas, il n'y a qu'un cycle évanouissant, lequel est justement engendré de la façon que je viens de dire.

Si l'on voulait envisager des surfaces possédant des singularités plus

compliquées (par exemple des points coniques), il pourrait se faire qu'il y en eût d'autres.

Supposons, par exemple, une surface ordinaire admettant deux points singuliers correspondant à la même substitution du groupe de Picard; si l'on fait varier cette surface et qu'à la limite ces deux points singuliers se confondent, la surface limite admettra alors un cycle évanouissant n'admettant pas ce mode de génération.

Si alors nous considérons un cycle évanouissant quelconque $\Sigma\theta_k M B'_k$, nous aurons la congruence

$$(5) \qquad \Sigma\theta_k \alpha_i \beta_i B'_k = -\Sigma\theta_k \beta_i B_k.$$

A chaque point singulier A_i faisons correspondre de la sorte un cycle évanouissant K_i, et, par conséquent, une congruence de la forme (5). Additionnons toutes ces congruences; il viendra

$$\Sigma\Sigma\theta_k \alpha_i \beta_i B'_k = -\Sigma\Sigma\theta_k \beta_i B_k.$$

Supposons que l'ensemble des cycles K_i soit homologue à zéro, de façon que l'on ait sur la surface S

$$\Sigma K_i \sim 0,$$

on aura sur S_0

$$\Sigma\Sigma\theta_k \beta_i B_k \sim 0,$$

c'est-à-dire qu'on pourra trouver des coefficients θ'' tels que

$$\Sigma\Sigma\theta_k \beta_i B_k = \Sigma\theta''_k \beta_i F''_k;$$

on aura alors

$$(6) \qquad \Sigma\Sigma\theta_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma\theta''_k \beta_i F''_k = 0.$$

Ainsi, à chaque combinaison de cycles évanouissants K_i, *telle que* $\Sigma K_i \sim 0$, *correspondra une congruence de la forme* (6).

Aux congruences ainsi obtenues il convient d'adjoindre la suivante :

$$\Sigma\beta_i F''_k = 0,$$

qui représente un cycle à deux dimensions formé de la surface S_0 tout entière. Toutes les congruences de la forme (2) seront manifestement des combinaisons de celles que nous venons d'obtenir.

Quelle est maintenant la condition pour que deux congruences de la forme (2) soient distinctes? ou, en d'autres termes, quelles sont les congruences de cette forme dont le premier membre est homologue à zéro?

Pour avoir toutes les homologies de la forme

$$\Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i B_k + \Sigma\theta''_k\beta_i F''_k \sim 0,$$

il faut chercher toutes les congruences entre cases et faces de la forme

$$(6)\qquad \Sigma\theta'_k\alpha_i\beta_i B_k + \Sigma\theta''_k\beta_i F''_k \equiv \Sigma\varepsilon_k B_k + \Sigma\zeta'_k\alpha_i\beta_i F'_k.$$

Si nous réduisons toutes les variétés qui figurent dans la congruence (6) à leurs points communs avec une surface S correspondant à une valeur de y non située sur une des coupures, il vient

$$\Sigma\varepsilon_k B_k \equiv 0,$$

ce qui signifie que l'ensemble d'arêtes $\Sigma\varepsilon_k B_k$ constitue un cycle fermé sur le polyèdre P. Soit $K(y)$ ce cycle.

Soit $K(M_i)$ [ou $K'(M_i)$] la limite vers laquelle tend ce cycle quand le point y se rapproche d'un point M_i appartenant à la coupure OA_i par la première lèvre de cette coupure (ou par la seconde lèvre), de sorte que $K(M_i)$ [ou $K'(M_i)$] représentent l'ensemble des points communs à la surface $S(M)$ et à $\Sigma\varepsilon_k\alpha_i\beta_i B_k$ (ou à $\Sigma\varepsilon_k\alpha_i\beta_{i+1} B_k$).

On aura alors (puisque $\Sigma\varepsilon_k B_k$ représente un cycle fermé sur le polyèdre P)

$$(7)\qquad \Sigma\varepsilon_k B_k \equiv \Sigma\varepsilon_k\alpha_i\beta_i B_k - \Sigma\varepsilon_k\alpha_i\beta_{i+1} B_k;$$

d'où

$$(8)\qquad \Sigma\zeta_k\alpha_i\beta_i F_k = \Sigma\theta_k\alpha_i\beta_i B_k + \Sigma\varepsilon_k\alpha_i\beta_{i+1} B_k - \Sigma\varepsilon_k\alpha_i\beta_i B_k + \Sigma\theta_k\beta_i F'_k.$$

ou, en réduisant toutes les variétés à leurs points communs avec la surface $S(M_i)$,

$$(9) \qquad \Sigma \zeta_k M_i F_k = \Sigma \theta_k M_i B_k + K'(M_i) - K(M_i);$$

c'est-à-dire qu'on doit avoir, sur le polyèdre P_i,

$$(10) \qquad K_i \sim K(M_i) - K'(M_i),$$

car $\Sigma \theta_k M_i B_k$ n'est autre chose que le cycle que nous avons appelé plus haut K_i.

Si, d'ailleurs, la condition (10) est remplie, on pourra trouver des nombres ζ de façon à satisfaire à la congruence (9); on aura alors, en faisant tendre M_i vers A_i,

$$\Sigma \zeta_k \alpha_i F_k = \Sigma \theta_k \alpha_i B_k + K'(A_i) - K(A_i).$$

Or, par hypothèse, K_i est un cycle évanouissant pour le point singulier A_i; de sorte que

$$\Sigma \theta_k \alpha_i B_k = 0.$$

D'ailleurs,

$$K'(A_i) = K(A_i) = \Sigma \varepsilon_k \alpha_i B_k.$$

Donc

$$\Sigma \zeta_k \alpha_i F_k = 0;$$

ce qui signifie que l'ensemble des faces $\Sigma \zeta_k \alpha_i P_k$ forme une surface fermée; cela ne peut arriver que si

$$(11) \qquad \Sigma \zeta_k \alpha_i F_k = 0$$

ou si $\Sigma \zeta_k \alpha_i F_k$ représente la surface $S(K_i)$ tout entière ou une des composantes de cette surface, dans le cas où cette surface est décomposable (voir *supra*, p. 182).

Si nous laissons de côté ce dernier cas, qui ne se présentera pas avec les surfaces n'admettant que des singularités ordinaires auxquelles M. Picard ramène toutes les autres, et qui, d'ailleurs, pourrait être

traité comme plus haut (p. 182), on voit que l'on peut toujours supposer

$$\Sigma \zeta'_k \alpha_i F'_k = n S(A_i),$$

n étant un entier; ou

$$\Sigma(\zeta'_k - n)\alpha_i F'_k = 0.$$

Or, dans la congruence (9), on peut remplacer ζ'_k par $\zeta'_k - n$ sans que la congruence cesse d'avoir lieu, car, la surface $S(M_i)$ étant fermée, on a

$$\Sigma M_i F'_k \equiv 0.$$

Nous pourrons donc toujours supposer que l'identité (11) a lieu. Il vient alors

$$\Sigma \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma \zeta'_k \alpha_i F'_k + \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k - \Sigma \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k - \Sigma \zeta'_k \beta_i F'_k.$$

Or, si nous tenons compte de l'identité (11) et si nous décomposons les faces F' en faces F'', nous posons

$$-\Sigma \zeta'_k \beta_i F'_k = \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k;$$

nous retrouverons la congruence (8) et, en ajoutant la congruence (7), nous aurons enfin la congruence (6).

Ainsi, à chaque système d'homologies telles que (10) correspond une homologie entre les faces, et il n'y en a pas d'autres.

Nous vérifions également que la combinaison

$$\Sigma \beta_i F''_k,$$

qui représente la surface de Riemann S_0 tout entière et qui, par conséquent, est congrue à zéro, n'est pas homologue à zéro.

Si, en effet, on avait une congruence de la forme (6), tous les θ' étant nuls, on devrait avoir une homologie de la forme (10), les cycles K_i étant nuls; ce qui veut dire que le cycle $K(y)$ serait invariant pour toutes les substitutions du groupe de Picard.

Les cycles $K'(M_i)$ et $K(M_i)$ ne seront alors pas autre chose que ce

que nous avons appelé Ω_i et Ω_i dans le paragraphe précédent; nous retrouverons alors l'homologie (5) du paragraphe précédent, laquelle ne différera que par les notations de l'homologie (9) du présent paragraphe; il suffit, en effet, pour passer de l'une à l'autre, d'annuler les θ', de changer $K'(M_i)$ en Ω_i, $K(M_i)$ en Ω_i, et d'écrire θ_k au lieu de ζ_k. Pour adopter les notations du paragraphe précédent, il faut écrire enfin $\zeta_q B_q$ au lieu de $\varepsilon_k B_k$.

Dans ce cas, nous aurons entre nos cases la congruence (2) du paragraphe précédent qui s'écrit

$$\Sigma \zeta_q B_q + \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k = 0,$$

ou, en revenant aux notations du présent paragraphe,

$$\Sigma \varepsilon_k B_k + \Sigma \zeta''_k \alpha_i \beta_i F'_k = 0.$$

Cela montre que le premier membre de (6) doit être identiquement nul, c'est-à-dire que non seulement les θ', mais les θ'' doivent être nuls.

Ainsi, toute homologie entre les faces $\beta F''$ se réduit à une identité, et, en particulier, on n'a pas

$$\Sigma \beta_i F'_k \sim 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Avant de conclure, je dois encore examiner les congruences où entrent des cases de la catégorie 1. Nous venons de voir qu'il ne peut y avoir plus d'une pareille congruence, ou plutôt que, s'il y avait deux pareilles congruences, elles ne seraient pas distinctes et qu'on pourrait passer de l'une à l'autre en ajoutant une homologie.

Voyons s'il existe une pareille congruence,

$$\Sigma \varepsilon_k C_k + H = 0, \tag{12}$$

où H est une combinaison de faces des catégories $\alpha\beta$ et β. D'abord nous devons supposer que $\Sigma \varepsilon_k$ n'est pas nul, sans quoi l'on pourrait ramener à une des congruences étudiées plus haut.

J'ajoute que, s'il existe une congruence de cette forme (12) où $\Sigma\varepsilon_k$ ne soit pas nul, cette congruence est certainement distincte des précédentes, car il ne peut pas y avoir d'homologie de la forme

$$\Sigma\varepsilon_k C_k + H \sim 0 \tag{13}$$

sans que $\Sigma\varepsilon_k$ soit nul.

Existe-t-il donc une congruence de la forme (12)? Pour le démontrer sans m'exposer à une discussion qui serait assez longue sans être difficile, je supposerai que, parmi les sommets du polyèdre P, en figurent m (que j'appellerai $C_1, C_2, \ldots, C_m$), si m est le degré en z de l'équation $f(x, y, z) = 0$ et qui correspondent à une valeur donnée de x, par exemple $x = x_0$ (voir *infra*, § 3).

Alors la combinaison $C_1 + C_2 + \ldots + C_m$, que j'écrirai pour abréger, ΣC_k, n'est autre chose que la surface de Riemann représentée par l'équation entre y et z

$$f(x_0, y, z) = 0.$$

On a alors

$$\Sigma C_k \equiv \Sigma C_k \alpha_i \beta_i - \Sigma C_k \alpha_i \beta_{i+1};$$

les m sommets $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ne faisant que s'échanger quand on passe d'une des lèvres de OA_i à l'autre en tournant autour de A_i, nous aurons

$$\Sigma C_k \alpha_i \beta_i = \Sigma C_k \alpha_i \beta_{i+1}$$

et, par conséquent,

$$\Sigma C_k \equiv 0.$$

Cette congruence est bien de la forme (12) et

$$\Sigma\varepsilon_k = m \neq 0.$$

Nous avons donc d'abord deux cycles à deux dimensions singuliers qui sont les deux surfaces de Riemann correspondant, l'une à $y = 0$ et l'autre à $x = x_0$.

Pour former les autres cycles à deux dimensions, il suffit de consi-

dérer q cycles

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_q,$$

correspondant aux q points singuliers

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_q,$$

chacun d'eux étant évanouissant par rapport au point singulier qui lui correspond; ces cycles doivent d'ailleurs satisfaire, sur le polyèdre P, à la condition

$$\Sigma K_i \sim 0.$$

Deux systèmes de cycles

$$\begin{array}{llll} K_1, & K_2, & \ldots, & K_q, \\ K'_1, & K'_2, & \ldots, & K'_q \end{array}$$

nous donneront deux cycles à deux dimensions distincts, à moins que l'on n'ait (sur P)

$$K'_i - K_i \sim K'(M_i) - K(M_i),$$

$K(y)$ étant un cycle quelconque du polyèdre P.

Si nous désignons par U_i et U'_i ce que deviennent les cycles K_i et K'_i quand le point M_i vient en O; par Ω_i ce que devient le cycle $K(y)$ quand le point y tend vers O dans l'angle $A_{i+1}OA_i$, alors cela signifie que nous devrons avoir sur S_0

$$\Sigma U_i \sim 0, \qquad \Sigma U'_i \sim 0,$$

et que nous ne devrons pas avoir, si nous voulons deux cycles distincts,

$$U'_i - U_i \sim \Omega_{i+1} - \Omega_i.$$

Voyons combien nous obtiendrons ainsi de cycles distincts, et pour cela combien nous obtiendrons de congruences distinctes de la forme indiquée, et nous en retrancherons le nombre des homologies distinctes.

Formons le Tableau des cycles évanouissants relatifs aux différents points singuliers A_i. Nous en distinguerons de deux sortes :

1° Ceux qui seront de la forme $\Omega' - \Omega$, Ω' étant le transformé du cycle Ω par la substitution du groupe de Picard qui correspond à A_i. Ce sont les seuls qui existent en général.

2° Les cycles évanouissants de la seconde sorte seront ceux qui ne seront ni de cette forme, ni une combinaison de cycles de cette forme.

Évidemment, pour chacun des points singuliers, nous devons réduire le nombre de ces cycles évanouissants autant que possible; nous ne devons donc faire figurer dans notre Tableau que des cycles linéairement indépendants. Si donc ces cycles sont

$$\begin{array}{l} m_{1,1}\omega_1 + m_{1,2} + \ldots + m_{1,2p}\omega_{2p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_{k,1}\omega_1 + m_{k,2} + \ldots + m_{k,2p}\omega_{2p}, \end{array}$$

le Tableau des coefficients entiers m aura $2p$ colonnes et k lignes ($k < 2p$), et les déterminants formés en supprimant dans notre Tableau $2p - k$ colonnes quelconques ne devront pas être tous nuls à la fois.

Réunissons maintenant les Tableaux relatifs aux q points singuliers; le Tableau total aura $2p$ colonnes et $\Sigma k = \mu$ lignes. Si les déterminants formés en supprimant dans ce Tableau $\mu - 2p + r$ lignes et r colonnes sont tous nuls, mais que les déterminants formés en supprimant $p - 2p + r + 1$ lignes et $r + 1$ colonnes ne soient pas tous nuls, le nombre cherché des congruences distinctes sera $\mu - 2p + r + 1$ (ou $\mu - 2p$ si les déterminants formés en supprimant $\mu - 2p$ lignes ne sont pas tous nuls).

Pour avoir le nombre des homologies distinctes, il faut chercher le nombre des combinaisons de cycles $U_1, U_2, \ldots, U_q$ telles que l'on ait

$$U_i \sim \Omega_{i+1} - \Omega_i.$$

Chaque cycle Ω donnera évidemment naissance à une pareille combinaison; mais si deux cycles Ω et Ω' ne diffèrent que par un cycle

invariant par rapport au groupe de Picard, ils donneront naissance à la même combinaison. Le nombre des homologies est donc égal au nombre total des cycles, soit $2p$, moins le nombre des cycles invariants distincts que j'appelle n.

Le nombre des cycles à deux dimensions distincts (*y compris les deux cycles singuliers*) sera donc

$$2 + (q + 2p + 1) - (n - 2p).$$

Voyons comment peuvent être engendrés ces cycles à deux dimensions non singuliers, en nous restreignant au cas le plus général, c'est-à-dire à celui où il n'y a pas de cycle évanouissant de la seconde sorte. Dans ce cas, on a

$$K_i = \Gamma_i - \Gamma_{i'}$$

Γ_i étant un cycle et $\Gamma_{i'}$ son transformé par la substitution qui correspond à A_i.

Décrivons donc dans le plan des y des lacets $L_1, L_2, \ldots, L_q$, partant du point O et y aboutissant, et entourant respectivement les points singuliers $A_1, A_2, \ldots, A_q$.

Soit Γ_i un cycle de la surface S_0; quand y partant du point O décrira le lacet L_i, la surface S et le cycle se déformeront; quand y reviendra au point O, ce cycle sera devenu le cycle Γ'_i de S_0; dans son mouvement, il aura engendré une surface σ_i limitée par les deux courbes fermées Γ_i et Γ'_i.

Si alors on a

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_q = \Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \ldots + \Gamma'_q,$$

l'ensemble des surfaces $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_q$ formera une surface fermée. Ce sera notre cycle à deux dimensions.

§ 4. Cycles à une dimension.

Le problème des cycles à une dimension a été entièrement résolu par M. Picard; je n'aurai donc qu'à traduire avec nos notations le raisonnement de M. Picard.

Cherchons quelles sont les congruences entre les arêtes. Ainsi que nous l'avons vu au début du paragraphe **2**, nous pouvons toujours supposer qu'une pareille congruence ne contient pas d'arêtes de la catégorie α. Notre congruence devra donc être de la forme

$$(1) \qquad \Sigma\theta'_k\,\alpha_i\beta_i C_k + \Sigma\theta''_k\,\beta_i B''_k = 0.$$

Observons que

$$\Sigma\theta'_k\,\alpha_i\beta_i C_k = \Sigma\theta'_k\,\alpha_i C'_k + H,$$
$$\Sigma\theta''_k\,\beta_i B''_k = H'$$

H et H' étant un ensemble de sommets de la catégorie β. Il vient donc

$$\Sigma\theta'_k\,\alpha_i C'_k + H + H = 0,$$

et, comme les sommets $\alpha' C'_k$ ne peuvent se réduire ni avec les sommets de la catégorie β, ni avec ceux de la catégorie α où l'indice de α serait différent de i, on doit avoir

$$(2) \qquad \Sigma\theta'_k\,\alpha_i C'_k = 0,$$

la sommation étant étendue à tous les sommets $\alpha_i C'_k$ appartenant à un même indice i, mais aux divers indices k.

Que signifie cette identité (2); quand, y venant en A_i, le polyèdre P'_i dégénère, plusieurs sommets peuvent se confondre, mais aucun ne peut disparaître (tandis qu'il peut y avoir disparition d'arêtes ou de faces). La somme algébrique de tous les coefficients θ'_k relatifs aux divers sommets $\alpha_i C'_k$, qui se confondent en un seul, doit donc être nulle; donc la somme de tous les θ'_k est nulle :

$$(3) \qquad \Sigma\theta'_k = 0.$$

A cause de la relation (3), nous pouvons trouver sur le polyèdre P'_i une combinaison d'arêtes $\Sigma\zeta'_k B_k$ telle que

$$(4) \qquad \Sigma\zeta'_k B_k = \Sigma\theta'_k C_k.$$

On aura alors

$$(5)\qquad \Sigma\zeta'_k\alpha_i\beta_i B_k = \Sigma\zeta_k\alpha_i B_k - \Sigma\zeta'_k\beta_i B'_k + \Sigma\theta_k\alpha_i\beta_i C_k.$$

D'ailleurs, lorsque y vient en A_i, les arêtes et les sommets B_k et C'_k du polyèdre P_i deviennent les arêtes et les sommets $\alpha_i B'_k$ et $\alpha_i C'_k$; nous avons donc la congruence

$$\Sigma\zeta'_k\alpha_i B'_k \equiv \Sigma\theta_k\alpha_i C'_k$$

ou, à cause de (2),

$$\Sigma\zeta'_k\alpha_i B_k \equiv 0.$$

Cette congruence signifie que la combinaison $\Sigma\zeta'_k\alpha_i B_k$ forme un cycle fermé sur la surface de Riemann $S(A_i)$. Mais, quand, y venant en A_i, la surface de Riemann dégénère, des cycles peuvent disparaître, mais il n'arrive jamais que des cycles nouveaux apparaissent. Donc, au cycle $\Sigma\zeta'_k\alpha_i B_k$ correspondra sur la surface $S(M_i)$ au moins un cycle fermé $\Sigma\varepsilon'_k M_i B'_k$, se réduisant à $\Sigma\zeta'_k\alpha_i B_k$ pour $M_i = \alpha_i$, de sorte que l'on ait

$$(6)\qquad \begin{gathered}\Sigma\varepsilon'_k M_i B'_k \equiv 0,\\ \Sigma\varepsilon'_k\alpha_i B'_k = \Sigma\zeta'_k\alpha_i B_k.\end{gathered}$$

Si alors nous remplaçons ζ'_k par $\zeta'_k - \varepsilon'_k$, la congruence (4) subsistera encore à cause de (6); la congruence (5) sera encore également vraie, et l'on aura

$$\Sigma(\zeta'_k - \varepsilon_k)\alpha_i B_k = 0.$$

Nous pouvons donc toujours supposer que les ζ'_k aient été choisis de telle façon que

$$(7)\qquad \Sigma\zeta'_k\alpha_i B_k = 0.$$

Si nous rapprochons la congruence (5) de l'identité (7), nous aurons l'homologie

$$(8)\qquad \Sigma\theta_k\alpha_i\beta_i C_k \sim \Sigma\zeta'_k\beta_i B_k$$

et, en ajoutant cette homologie à (1), il vient

$$\Sigma \xi_k' \beta_i B_k' + \Sigma \theta_k'' \beta_i B_k'' \equiv 0,$$

où ne figurent plus que des arêtes de la catégorie β.

Nous pouvons donc toujours supposer que notre congruence (1) ne contient que des arêtes de la catégorie β. C'est le théorème de Picard, d'après lequel un cycle à une dimension peut toujours être ramené dans une position telle que y soit constant tout le long de ce cycle.

A chacun des cycles fermés de la surface S_0 correspond donc une congruence de la forme (1), mais toutes ces congruences ne sont pas distinctes. C'est ce qu'a montré M. Picard. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ les $2p$ cycles de S_0, et supposons qu'une substitution S_h du groupe de Picard change ω_i en

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_{2p}\omega_{2p},$$

on aura l'homologie

$$\omega_i \sim m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_{2p}\omega_{2p}. \tag{9}$$

Ces homologies réduisent le nombre des cycles à une dimension, et M. Picard a même montré que, pour la surface algébrique la plus générale, ce nombre se réduit à zéro.

Appelons *cycles subsistants* ceux qui ne sont pas une combinaison linéaire de divers cycles évanouissants par rapport à divers points singuliers A_i. Ce sont ceux qui restent distincts quand on tient compte des homologies (9). Et, en effet, l'homologie (9) exprime que le cycle

$$\omega_i - \Sigma m_k \omega_k$$

est évanouissant par rapport au point singulier qui correspond à la substitution S_h du groupe de Picard.

Il y a donc autant de cycles à une dimension que de cycles subsistants. Nous avons vu, d'autre part, qu'il y a autant de cycles à trois dimensions que de cycles invariants.

Or, d'après le théorème fondamental sur les nombres de Betti, il doit y avoir autant de cycles à une dimension que de cycles à trois dimensions.

Il doit donc y avoir autant de cycles subsistants que de cycles invariants.

C'est ce que nous allons vérifier.

Cette vérification est aisée s'il n'y a pas de cycles évanouissants de la seconde sorte.

Rappelons, en effet, que le groupe de Picard est d'une forme particulière.

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ les cycles fondamentaux et envisageons la forme bilinéaire

$$\Phi = \omega_2\omega_1 - \omega_1\omega_2 + \omega_4\omega_3 - \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2p}\omega_{2p-1} - \omega_{2p-1}\omega_{2p}.$$

Pourvu que les cycles fondamentaux aient été convenablement choisis, si l'on fait subir aux ω l'une des substitutions linéaires du groupe de Picard, et qu'on fasse subir en même temps aux ω' cette même substitution linéaire, la forme Φ demeure inaltérée. D'autre part, le nombre des cycles subsistants sera le même que celui des solutions distinctes du système (A) d'équations linéaires obtenues en égalant chaque cycle fondamental à son transformé par chacune des substitutions de Picard.

Soit alors $\Sigma m_i\omega_i$ un cycle invariant; comme l'expression $\Sigma m_i\omega_i$ peut être assimilée à la forme linéaire Φ, en faisant

$$\omega_2 = m_1, \qquad \omega_1 = -m_2, \qquad \omega_3 = m_4, \qquad \omega_4 = -m_3, \qquad \ldots;$$

comme, d'autre part, $\Sigma m_i\omega_i$ se change en $\Sigma m_i\omega_i$ quand les ω subissent une des substitutions linéaires du groupe de Picard, nous devons conclure que le système de valeurs

$$m_2, \quad -m_1, \quad m_4, \quad -m_3, \quad \ldots$$

est son propre transformé par cette substitution linéaire. C'est donc une solution du système (A) dont nous venons de parler.

On voit, d'ailleurs, qu'à deux ou plusieurs cycles invariants linéai

rement indépendants correspondront ainsi deux ou plusieurs solutions du système (A) linéairement indépendantes, et inversement.

Il y aura donc autant de cycles subsistants que de cycles invariants.

C. Q. F. D.

Qu'arrivera-t-il, maintenant, s'il y a des cycles évanouissants de la seconde sorte ?

J'ai déjà dit que ce cas ne peut se présenter pour ces surfaces à singularités ordinaires auxquelles M. Picard a ramené toutes les autres (t. I, p. 85). Il est vrai qu'il pourrait avoir lieu pour d'autres surfaces si l'on voulait les étudier sans leur faire subir préalablement la transformation de M. Picard; mais ces surfaces présenteraient un point singulier d'une nature spéciale, et la variété V à quatre dimensions engendrée par cette surface présenterait elle-même un point singulier.

Or, les théorèmes généraux qui nous occupent et que nous avons démontrés dans l'*Analysis Situs* et ses compléments ne sont pas applicables aux variétés V présentant des points singuliers; ils cesseraient, en général, d'être vrais pour ces variétés, à moins que l'on ne fasse des conventions spéciales.

La question même de savoir si un cycle évanouissant de la seconde sorte doit être regardé comme homologue à zéro dépend encore des conventions également légitimes que l'on peut faire. Il est vrai qu'un pareil cycle sert de frontière complète à une variété à deux dimensions faisant partie de V; mais sur cette variété se trouve un point singulier de V.

Pour faire comprendre la difficulté qui en résulte, prenons un exemple beaucoup plus simple; imaginons dans l'espace ordinaire une surface présentant un point conique, ou plus simplement encore un cône de révolution avec son prolongement. Soit S le sommet du cône, C une des circonférences de ce cône. Dans un sens, la circonférence C est la frontière complète d'une région de ce cône, celle qui est comprise entre la circonférence C et le sommet S. Mais, d'un autre côté, une ligne tracée sur le cône pourra sortir de cette région sans traverser C, si, en passant par le sommet S, elle passe d'une nappe du cône à l'autre.

Dans ces conditions, il semblera préférable de laisser de côté ces cas

singuliers et de se borner à ces surfaces à singularités ordinaires auxquelles toutes les autres peuvent être ramenées.

§ 5. — Remarques diverses.

Dans la suite des démonstrations, nous avons été amenés à faire diverses hypothèses au sujet de nos polyèdres. Rappelons-les sommairement :

1° Nous avons supposé que (*voir* p. 174) le polyèdre que nous avons appelé P' restait homéomorphe à lui-même quand y suivait la coupure OA_i depuis A_i jusqu'en O.

2° Nous avons comparé (*voir* p. 182) la surface de Riemann S_0, qui correspond au point O, à la surface de Riemann $S(M)$ qui correspond au point M, et nous avons dit qu'on pouvait faire correspondre ces deux surfaces point par point. Nous nous sommes servi de cette correspondance pour définir les cycles U_i et U'_i qui correspondent sur S_0 à Ω_i et Ω'_i.

3° Nous avons admis ensuite (p. 183) que, quand le point M varie depuis A_i jusqu'à M_0, les deux cycles U_i et U'_i, d'abord confondus, balayent une certaine région R de S_0 à laquelle correspond, sur $S(M_0)$, la région $\Sigma \theta'_k M_0 F'_k$.

4° Nous avons admis que, quand le point M décrit successivement les deux lèvres de la coupure OA_1, puis les deux lèvres de OA_2, ..., et, enfin, les deux lèvres de la coupure OA_q, le cycle mobile U_i (qui revient à sa situation initiale Ω_i^0 après avoir occupé une série continue de situations successives) ne balaye pas la surface S_0 tout entière.

5° Nous avons dit (p. 191) que, si la surface $f(x, y, z) = 0$ a été ramenée, par les procédés de M. Picard, à ne posséder que des singularités ordinaires, à chaque point singulier A_i correspond un seul cycle évanouissant.

6° Nous avons supposé (p. 197) que parmi les sommets de P en figurent m qui correspondent à une valeur constante de x, par exemple $x = 0$.

La légitimité de ces hypothèses étant à peu près évidente, je n'ai pas voulu interrompre les raisonnements des paragraphes précédents,

pour en donner une démonstration explicite. Je n'aurais, d'ailleurs, pu le faire qu'en particularisant le polyèdre P, c'est-à-dire en faisant des hypothèses particulières sur la manière dont la surface de Riemann S est subdivisée en polyèdre.

Je crois utile maintenant de revenir sur ces différents points et de faire la démonstration, en adoptant une quelconque de ces hypothèses particulières sur P.

On pourrait, par exemple, construire le polyèdre P de la façon suivante :

Commençons par réduire la surface $f = 0$ à n'avoir que des singularités ordinaires.

Donnons à y une valeur quelconque, et considérons la surface de Riemann S correspondante. Cette surface se composera de m feuillets appliqués sur le plan des x (si l'équation $f = 0$ est de degré m en z).

Marquons sur le plan des x l'origine O et les points singuliers correspondant aux équations

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dz} = 0.$$

Soit n le nombre de ces points singuliers; soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ces points singuliers. Joignons le point O aux n points singuliers $B_1, B_2, \ldots, B_n$ par n coupures $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ ne se coupant pas mutuellement et se succédant autour du point O dans l'ordre sus-indiqué.

On obtiendra la surface de Riemann de la façon ordinaire en raccordant la première lèvre de l'une des coupures sur un des feuillets avec la seconde lèvre de cette même coupure sur un autre feuillet. Par le tracé de ces coupures, la surface de Riemann sera ainsi subdivisée en un polyèdre qui sera notre polyèdre P.

On voit que ce polyèdre a m faces (qui sont les F_k) et que chacune de ces faces est un polygone de $2n$ côtés.

Qu'arrive-t-il maintenant quand on fait varier y? Les points singuliers B vont se déplacer; les coupures OB se déformeront, et nous supposerons qu'elles se déforment de façon à ne jamais se couper et à se succéder toujours dans le même ordre autour de O. Quand y décrira un petit contour fermé, cette déformation pourra se faire de telle façon

que les coupures reviennent à leurs positions primitives, à moins qu'il n'y ait à l'intérieur du contour un point singulier.

Les points singuliers possibles sont de deux sortes :

1° D'abord ceux qui correspondent aux cas où deux des points singuliers B s'échangent entre eux (un raisonnement de M. Picard montre que si la surface $f = 0$ n'a que des singularités ordinaires, cela ne peut arriver que si le plan $y = \text{const.}$ est tangent à la surface $f = 0$);

2° Puis ceux qui correspondent aux cas où l'un des points singuliers B vient en O.

Les points singuliers de la seconde sorte ne sont pas essentiels, et j'aurais pu les faire disparaître si je n'avais cru plus avantageux de les conserver.

Je désigne tous ces points singuliers par $A_1, A_2, \ldots, A_q$ et je trace dans le plan des y les coupures $OA_1, OA_2, \ldots, OA_q$.

Tant que y ne franchit pas ces coupures OA, les coupures OB peuvent se déformer de façon à ne jamais se couper mutuellement, et, par conséquent, de façon que P reste homéomorphe à lui-même, et en même temps de façon que, si y décrit un contour fermé, ces coupures OB reviennent à leurs positions initiales.

Comparons maintenant les configurations des coupures OB quand y se trouve en deux points infiniment voisins sur les deux lèvres d'une coupure OA_i.

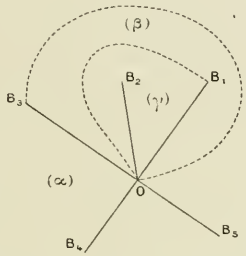
Supposons d'abord que A_i soit un point singulier de la première sorte. Si l'on suppose que la surface $f = 0$ n'a que des singularités ordinaires et que, par conséquent, le plan $y = A_i$ est tangent à $f = 0$ en un point ordinaire, on voit que, quand y tourne autour de A_i, deux des points singuliers, par exemple B_1 et B_3, s'échangent. De plus, si le point B_1 permute deux des feuillets de la surface de Riemann, le point B_3 qui s'échange avec lui permutera les deux mêmes feuillets de cette surface. J'appellerai ces deux feuillets *le premier et le second feuillets de la surface*.

Quand y ayant tourné autour de A_i reviendra infiniment près de sa position primitive, mais sur l'autre lèvre de la coupure, on pourra supposer que les coupures OB sont revenues à leur situation primitive, à l'exception des coupures OB_1 et OB_3. Ces deux dernières coupures,

qui occupaient primitivement les lignes OB_1 et OB_3 marquées en trait plein sur la figure, occuperont finalement les lignes OB_3 et OB_1 marquées en trait pointillé sur la figure.

On voit que la surface de Riemann peut être subdivisée de deux

Fig. 1.



manières en un polyèdre P, les deux modes de subdivision diffèrent l'un de l'autre parce que les lignes pleines OB_1 et OB_3 sont remplacées par les lignes pointillées OB_3 et OB_1.

Si l'on superpose les deux modes de subdivision, on aura le polyèdre que j'ai appelé P'. On voit que deux des m faces de P, celles qui correspondent aux deux premiers feuillets, ont été subdivisées en trois faces partielles désignées sur la figure par les lettres (α), (β), (γ).

Lorsque y décrira la coupure OA_i, les points B se déplaceront d'une manière continue, sans jamais se confondre ni entre eux, ni avec le point O (sauf, bien entendu, quand y vient en A_i). Il en résulte que l'on peut déformer toutes nos coupures OB (tant en trait plein qu'en trait pointillé) en évitant qu'elles se coupent jamais mutuellement. Cela veut dire que le polyèdre P' restera constamment homéomorphe à lui-même. Dire que P' reste homéomorphe à lui-même, c'est dire que l'on peut faire correspondre point par point la surface S(M) à une autre surface S(M') correspondant à une autre position M' de y sur OA_i, et en particulier à S_0. On remarquera que la correspondance peut se faire de façon qu'à un point à l'infini sur S(M) corresponde un point à l'infini sur S(M').

Lorsque y vient en A_i, le polyèdre P dégénère : les deux points B_1 et B_3 se confondent. Il en est de même de la coupure OB_1 trait plein avec OB_3 pointillé, ainsi que de OB_1 pointillé avec OB_3 trait plein. Le polygone partiel marqué (β) sur la figure disparaît alors.

Pour aller plus loin, remarquons qu'il y a deux coupures qui se projettent suivant la ligne OB_1 en trait plein ; quand on suit la première (que nous appellerons B_1G) de O en B_1, on a le premier feuillet à gauche et le second à droite ; quand on suit la seconde (que nous appellerons B_1D), on a le premier feuillet à droite et le second à gauche. Nous définirons de même B_3G et B_3D. Si, au lieu de la ligne OB_1 en trait plein, nous envisageons la ligne OB_1 en trait pointillé, nous obtiendrons de même deux coupures que j'appellerai B'_1G et B'_1D ; et je définirai encore de même B'_3G et B'_3D.

Nous voyons tout de suite que, quand y tourne autour de A_i, les coupures B_1G et B_3G, B_1D et B_3D, B'_3G et B'_1G, B'_3D et B'_1D se permutent : que, pour $y = A_i$, B_1G et B_3G, ... se confondent.

Je désignerai par β_1 celui des polygones partiels β qui appartient au premier feuillet si l'on adopte la première subdivision, celle qui correspond au trait plein ; l'autre polygone β s'appellera β_2.

On a alors les congruences

$$\beta_1 \equiv B_1D - B'_1D + B'_3D - B_3D,$$
$$\beta_2 \equiv B'_1G - B_1G + B_3G - B'_3G,$$

qui nous apprennent quelles sont celles de nos coupures qui servent de frontières à β_1 et à β_2.

Considérons la combinaison

$$\omega = B_3D - B'_1D - B'_3G + B_1G.$$

C'est un cycle de notre surface de Riemann ; quand y tourne autour de A_i, elle se change en

$$B_1D - B'_1D - B'_1G + B_3G,$$

c'est-à-dire en $-\omega$. C'est donc un cycle évanouissant. Il est aisé de voir qu'il n'y en a pas d'autre.

Reprenons maintenant les cycles que nous avons appelés Ω_i *et* Ω'_i au paragraphe 2. Soit

$$\Omega_i = \zeta_1 B_1 D + \zeta_1 B_1 G + \zeta_3 B_3 D + \zeta_1 B_3 G + H,$$

les ζ étant des coefficients entiers et H une combinaison d'autres arêtes de P_1. Comme le cycle Ω_i doit être fermé, on devra avoir

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta_3 + \zeta_1 = 0,$$

puisque le sommet B_1, par exemple, n'appartient qu'aux deux arêtes $B_1 D$ et $B_1 G$. Nous aurons ensuite

$$\Omega'_i = \zeta_1 B'_3 D + \zeta_2 B'_3 G + \zeta_3 B'_1 D + \zeta_1 B'_3 G + H.$$

Car les arêtes de P, autres que $B_1 D$, $B_1 G$, $B_3 D$, $B_3 G$, ne sont pas altérées quand y tourne autour de A_i, c'est-à-dire que H n'est pas altéré. On aura donc

$$\begin{aligned}\Omega_i - \Omega'_i = \quad & \zeta_1 (B_1 D - B_1 G - B'_3 D + B'_3 G) \\ & + \zeta_3 (B_3 D - B_3 G - B'_1 D + B'_1 G).\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}(B_1 D - B_1 G - B'_3 D + B'_3 G) = \quad & (B'_1 G - B_1 G + B'_3 G - B_3 G) \\ & - (B'_1 D - B_1 D + B'_3 D - B_3 D) \\ & - (B_3 D - B'_1 D - B_3 G + B'_1 G)\end{aligned}$$

ou

$$(B_1 D - B_1 G - B'_3 D + B'_3 G) + \omega \equiv \beta_2 - \beta_1;$$

d'où

$$\begin{gathered}\Omega_i - \Omega'_i + (\zeta_1 - \zeta_3)\omega \equiv \zeta_1 (\beta_2 - \beta_1), \\ \Omega_i - \Omega'_i \sim (\zeta_3 - \zeta_1)\omega.\end{gathered}$$

Or, nous avons supposé que le cycle Ω_i est invariant, c'est-à-dire que

$$\Omega_i \sim \Omega'_i,$$

ce qui exige $\zeta_1 = \zeta_3$. Dans ces conditions, reprenons la congruence (5) du paragraphe 2, qui peut s'écrire

$$\Omega_i - \Omega_i = \Sigma \theta_k \, \mathrm{M} \mathrm{F}_k.$$

En la rapprochant de la congruence précédente, nous trouvons

$$\Sigma \theta_k \, \mathrm{M} \mathrm{F}_k = \zeta_1 (\beta_2 - \beta_1).$$

Quand y (ou M) vient en A_i, les polygones partiels β_1 et β_2 disparaissent, de sorte que le second membre de cette égalité disparaît; le premier se réduit à $\Sigma \theta_k \alpha_i \mathrm{F}_k$, d'où l'on tire

$$\Sigma \theta_k \alpha_i \mathrm{F}_k = 0.$$

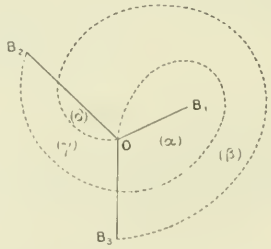
Ainsi se trouve justifié ce que nous avons dit aux pages 181 et suivantes.

Supposons maintenant que A_i soit un point singulier de la seconde sorte, et que pour $y = \mathrm{A}_i$ le point singulier B_1 vienne en O.

Nous pouvons faire alors une figure analogue à la figure 1; pour simplifier, je représenterai trois points singuliers seulement, B_1, B_2 et B_3.

Quand y tourne autour de A_i, la coupure OB_1 reprend sa situation

Fig. 2.



primitive, mais les coupures OB_2 et OB_3 (trait plein) se transforment dans les coupures OB_2 et OB_3 (trait pointillé).

Nous avons deux modes de subdivision et, en les superposant, on a le polyèdre P'.

Chaque face de P (c'est-à-dire chaque feuillet de S) se trouve subdivisée en un certain nombre de faces partielles. Dans le cas de la figure 2, il y en a cinq désignées sur la figure par (α), (β), (γ), (δ), (ε).

Il est clair que, quand y décrira la coupure OA_i, on peut s'arranger pour que la figure précédente (et par conséquent, le polyèdre P') reste constamment homéomorphe à elle-même.

Je désignerai par OB_2 et OB_3 les coupures en trait plein, par OB_2' et OB_3' les coupures correspondantes en trait pointillé. Je vois que, ces coupures se coupant mutuellement, chacun des tronçons de ces coupures formera l'une des arêtes de P'. Je distinguerai, sur chacune de ces coupures, le *tronçon terminal*, c'est-à-dire celui qui aboutit au point B_2 ou B_3.

Quand y vient en A_i, le polyèdre P' dégénère; plusieurs de ses arêtes se réduisent à zéro, à savoir l'arête OB_1 et tous les tronçons de OB_2, OB_3, OB_2', OB_3', *les tronçons terminaux exceptés*. D'ailleurs, le tronçon terminal de OB_2 se confond avec celui de OB_2' et celui de OB_3 avec celui de OB_3'. Il en résulte que les quatre faces partielles (α), (β), (γ), (δ) disparaissent.

Il n'y a pas ici de cycle évanouissant, le point singulier A_i n'étant pas essentiel.

Nous avons sur la figure

$$OB_2 - OB_2' \equiv (\alpha) + (\gamma) + (\delta),$$
$$OB_3 - OB_3' \equiv (\alpha) + (\beta) + (\delta).$$

Revenons à notre cycle Ω_i: nous aurons

$$\Omega_i = \Sigma\zeta_1 OB_1 + \Sigma\zeta_2 OB_2 + \Sigma\zeta_3 OB_3.$$

Je mets le signe Σ parce qu'il y a plusieurs coupures (appartenant à différents feuillets de la surface de Riemann) qui se projettent suivant OB_1. On aura ensuite

$$\Omega_i' = \Sigma\zeta_1 OB_1 + \Sigma\zeta_2 OB_2' + \Sigma\zeta_3 OB_3';$$

d'où

$$\Omega_i - \Omega_i = \Sigma \zeta_2 (OB_2 - OB_2) + \Sigma \zeta_3 (OB_3 - OB_3),$$
$$\Omega_i - \Omega_i = \Sigma \zeta_2 [(\alpha) + (\gamma) + (\delta)] + \Sigma \zeta_3 [(\alpha) + (\beta) + (\delta)],$$

et, en comparant à la congruence (5) du paragraphe 2,

$$\Sigma \theta_k MF_k = \Sigma \zeta_2 [(\alpha) + (\gamma) + (\delta)] + \Sigma \zeta_3 [(\alpha) + (\beta) + (\delta)].$$

Quand y vient en A_i, (α), (γ), (δ) disparaissent, de sorte qu'il reste

$$\Sigma \theta_k \alpha_i F_k = 0,$$

ce qui justifie encore ici ce que nous avons dit page 181.

Supposons que le point y décrive les différentes coupures OA_1, OA_2, ..., OA_q, les points singuliers B décriront certaines lignes : nous pouvons supposer qu'aucune de ces lignes ne s'éloigne indéfiniment. En effet, si cela n'était pas, nous trouverions toujours dans le plan des x un petit cercle qui ne serait coupé par aucune de ces lignes, et alors, par un simple changement linéaire de variables, nous pourrions rejeter le centre de ce cercle à l'infini.

Donc, quand le point y décrira successivement les deux lèvres de OA_1, les deux lèvres de OA_2, etc., et, enfin, celles de OA_q, les points singuliers B resteront à distance finie. Nous pourrons donc diriger la déformation des coupures OB de façon que ces coupures restent à distance finie. Le cycle Ω_i, qui est formé par une combinaison de ces coupures, restera donc toujours à distance finie ; et il en sera de même du cycle L_i, qui lui correspond sur S_0 [car nous pouvons choisir la correspondance de $S(M)$ avec S_0 de façon qu'à un point à l'infini sur $S(M)$ corresponde un point à l'infini sur S_0]. Ce cycle ne pourra donc balayer la surface S_0 tout entière, ce qui justifie ce que nous avons dit page 185.

On remarquera enfin que, parmi les sommets de P, nous en avons m qui correspondent à $x = 0$.

Toutes nos hypothèses se trouvent donc justifiées.

Sur la stabilité de l'équilibre relatif;

PAR M. P. DUHEM.

1. — Examen de divers criteria de stabilité pour une masse animée d'un mouvement de rotation uniforme. Équivalence du criterium énoncé par M. H. Poincaré avec celui que nous avons énoncé.

Considérons un système rapporté à des axes mobiles et susceptible de prendre, par rapport à ces axes mobiles, un mouvement isothermique. Soit $\mathcal{F}$ son potentiel interne, qui est le même soit que l'on rapporte le système aux axes fixes, soit qu'on le rapporte aux axes mobiles.

Soient, pendant le temps dt, $d\mathfrak{T}_e$ le travail effectué par les forces extérieures dans le déplacement par rapport aux axes mobiles et $d\mathfrak{T}_c$ le travail des forces centrifuges dans le même déplacement; le travail des forces centrifuges composées est identiquement nul; soit $d\mathfrak{V}$ le travail de viscosité, qui garde même valeur, que le déplacement soit rapporté aux axes fixes ou aux axes mobiles.

Soit enfin $\mathfrak{T}$ la force vive rapportée aux axes mobiles.

Nous pourrons écrire

$$(1) \qquad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_c + d\mathfrak{V} - d\mathcal{F} = d\mathfrak{T}.$$

Supposons que les forces extérieures admettent, par rapport aux axes mobiles, un potentiel Ω_r et que les forces centrifuges admettent, par rapport aux mêmes axes, un potentiel V_r. L'égalité précédente

pourra s'écrire

$$(2) \qquad d(\mathcal{F} + \Omega_r + V_r + \mathfrak{T}) = d\theta.$$

A cette égalité on peut appliquer la démonstration de Lejeune-Dirichlet, modifiée au besoin comme nous l'avons indiqué [1], si le système dépend d'un nombre illimité de paramètres. On sera conduit ainsi à la proposition suivante :

Un système est assurément en équilibre relatif stable dans un état où la somme

$$(3) \qquad \Phi_r = \mathcal{F} + \Omega_r + V_r$$

a une valeur minimum parmi toutes celles que peuvent lui faire prendre les déplacements isothermiques virtuels du système.

Supposons, en particulier, que le système des axes fixes et le système des axes mobiles aient même origine et même axe des z et que le système des axes mobiles tourne uniformément autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire ω_0. La force centrifuge appliquée à une masse élémentaire dm, de coordonnées x', y', z' par rapport aux axes mobiles, a pour composantes :

$$X_c = \omega_0^2 x' dm, \qquad Y_c = \omega_0^2 y' dm, \qquad Z_c = 0,$$

en sorte que l'on aura

$$V_r = -\frac{\omega_0^2}{2}\int (x'^2 + y'^2)\, dm$$

ou bien

$$(4) \qquad V_r = -\frac{\omega_0^2}{2}\int r^2\, dm,$$

r étant la distance de la masse dm à l'axe de rotation.

---

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie, Chap. II, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 362). — *Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 5).

Un déplacement virtuel quelconque par rapport aux axes mobiles est aussi un déplacement virtuel quelconque par rapport aux axes fixes; le potentiel Ω_r des actions extérieures par rapport aux axes mobiles ne diffère pas du potentiel Ω des mêmes actions par rapport aux axes fixes; l'égalité (3) devient donc

$$\Phi_r = \mathcal{F} + \Omega + V_r \tag{5}$$

et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Un système est en équilibre relatif stable dans un état où il tourne d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe Oz et où la grandeur Φ_r, définie par l'égalité (5), a une valeur minimum parmi toutes celles que peuvent lui donner les déplacements isothermiques virtuels du système.

L'invariabilité de la température est, ici, la seule restriction apportée aux perturbations que subit le système. Dans le calcul de la variation qu'un déplacement virtuel du système impose à la quantité V_r, donnée par l'égalité (4), on ne doit pas oublier que la valeur de ω_0 n'est pas affectée par un tel déplacement virtuel.

Le criterium que nous venons d'énoncer a été employé par Thomson et Tait, puis par divers auteurs tels que M. H. Poincaré et M. J. Hadamard.

Au cours de son grand Mémoire *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (1), M. H. Poincaré a proposé un autre criterium de stabilité pour une telle masse fluide. Le point de départ de sa très brève analyse est une sorte d'esquisse de la démonstration développée dans notre premier écrit sur ce même sujet (2); mais l'emploi d'une remarquable inégalité fournit une proposition d'autre forme que celle que nous avons énoncée.

---

(1) Voir *Stabilité des ellipsoïdes*, § XIV (*Acta mathematica*, t. VII, 1885, p. 365).

(2) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. VII, 1901, p. 311).

Nous allons prouver que le criterium énoncé par M. H. Poincaré est exactement équivalent à celui que nous avons formulé. Pour obtenir ce résultat, il nous suffira, pour ainsi dire, de reprendre l'analyse de M. Poincaré en précisant quelques points.

Commençons par démontrer l'inégalité dont M. Poincaré fait usage.

Soient dm une masse élémentaire du système et a, b deux quantités prenant, en chaque point du système, une valeur déterminée; *la quantité a est supposée essentiellement positive.* Considérons la forme, quadratique en X et Y,

$$(6) \qquad F = X^2 \int a\,dm + 2XY \int ab\,dm + Y^2 \int ab^2\,dm.$$

On peut écrire

$$F = \int a(X^2 + 2bXY + b^2Y^2)\,dm = \int a(X + bY)^2\,dm.$$

Si b a la même valeur en tous les points du système, la quantité F peut être égale à zéro sans que X et Y le soient; il suffit pour cela que l'on ait $\frac{X}{Y} = -b$; si, au contraire, b varie d'un point à l'autre du système et si l'on n'a pas $X = 0$, $Y = 0$, F est positif, en sorte que, dans ce cas, la forme (6) est définie positive. Nous pouvons donc énoncer la proposition que voici :

Si a représente une quantité positive en tous les points du système et si b n'a pas la même valeur en tous ces points, on a l'inégalité

$$(7) \qquad \int a\,dm \int ab^2\,dm - \left(\int ab\,dm\right)^2 > 0.$$

Le criterium que nous avons énoncé nous enseigne qu'un système animé, autour de l'axe des z, d'un mouvement de rotation uniforme dont ω_0 est la vitesse angulaire est assurément en équilibre relatif stable pour toutes les perturbations qui n'altèrent pas le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z, dans un état où

la quantité

$$(8) \qquad \Phi = \mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}\int r^2\omega^2\,dm$$

a une valeur minimum parmi celles que peuvent lui faire prendre toutes les variations virtuelles accomplies sans changement de température et sans changement du moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z.

Soit I_0 le moment d'inertie du système, par rapport à l'axe des z, en l'état d'équilibre relatif initial; la valeur initiale du moment de la quantité de mouvement est $I_0\omega_0$. L'égalité qui exprime la conservation du moment de la quantité de mouvement est

$$(9) \qquad \int r^2\omega\,dm = I_0\omega_0.$$

Nous sommes donc amenés à exprimer que, *si l'on prend toutes les formes, voisines de la forme d'équilibre, que le système peut présenter, et qu'on affecte chaque masse dm d'une grandeur* ω *telle que l'égalité* (9) *soit vérifiée, on aura*

$$(10) \qquad \mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}\int r^2\omega^2\,dm > \mathcal{F}_0 + \Omega_0 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2.$$

Nous pouvons supposer tout d'abord que l'on donne à ω la même valeur en tous les points du système; alors, si l'on désigne par

$$I = \int r^2\,dm$$

le moment d'inertie du système déformé, l'égalité (9) donnera

$$(11) \qquad I\omega = I_0\omega_0,$$

tandis que l'inégalité (10) deviendra

$$\mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}I\omega^2 > \mathcal{F}_0 + \Omega_0 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(12) \qquad \mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}\frac{I_0^2\omega_0^2}{I} > \mathcal{F}_0 + \Omega_0 + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2.$$

Ainsi, pour que notre criterium soit vérifié, il *faut* que l'inégalité (12) soit vérifiée pour toute forme du système voisine de la forme d'équilibre relatif.

Montrons maintenant que cela *suffit*.

Considérons une forme quelconque de ce système, voisine de la forme d'équilibre relatif; en cette forme, l'inégalité (12) est vérifiée.

En cette forme, distribuons les valeurs de ω de telle sorte que l'égalité (9) soit vérifiée.

L'inégalité (7), où nous pouvons faire $a = r^2$, $b = \omega$, nous permet d'écrire

$$\left(\int r^2 \omega \, dm\right)^2 \leq \int r^2 \, dm \int r^2 \omega^2 \, dm,$$

le signe $=$ étant de mise exclusivement dans le cas où ω a la même valeur en tous les points du système.

Selon l'égalité (9), l'inégalité précédente peut s'écrire

$$I_0^2 \omega_0^2 \leq I \int r^2 \omega^2 \, dm.$$

On voit alors que l'inégalité (12) entraîne l'égalité (10).

Notre criterium peut donc s'énoncer ainsi :

La quantité

$$(13) \qquad \Psi = \mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}\frac{I_0^2\omega_0^2}{I}$$

a une valeur moindre dans l'état d'équilibre relatif qu'en tout état voisin où la température du système est la même.

C'est précisément le criterium énoncé par M. Poincaré.

2. — Le criterium précédent n'est pas nécessaire pour la stabilité de l'équilibre relatif.

Comme l'a remarqué M. H. Poincaré, l'inégalité (12) peut s'écrire

$$\mathcal{F} + \Omega - \mathcal{F}_0 - \Omega_0 - (I - I_0)\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{(I - I_0)^2}{I}\frac{\omega_0^2}{2} > 0,$$

en sorte que, pour qu'elle ait lieu, il est suffisant, mais il n'est pas nécessaire, que l'on ait l'inégalité

$$\mathcal{F} + \Omega - I\frac{\omega_0^2}{2} > \mathcal{F}_0 + \Omega_0 - I_0\frac{\omega_0^2}{2}$$

ou, selon (4) et (5),

$$\Phi_r > \Phi_{r0}.$$

Donc, *toutes les fois que le criterium de Thomson et Tait indiquera qu'un système est en équilibre relatif stable, le criterium de M. Poincaré (ou le nôtre, qui lui est équivalent) indiquera certainement aussi que ce système est en équilibre relatif stable; mais la seconde indication peut être donnée alors que la première ne le serait pas.*

Il en résulte que *le criterium de Thomson et Tait ne saurait être nécessaire pour la stabilité de l'équilibre relatif.* M. Hadamard [1] l'a d'ailleurs prouvé en appliquant ce criterium à la rotation des solides pesants.

Mais le criterium de M. Poincaré ou le nôtre, qui lui est équivalent, ne serait-il pas nécessaire pour la stabilité de l'équibre relatif? Nous allons montrer qu'il n'en est rien et, pour cela, nous allons, selon la méthode qui a permis à M. Hadamard de discuter le criterium de Thomson et Tait, appliquer notre criterium à la rotation autour de la verticale d'un solide pesant, suspendu par un point fixe.

---

[1] J. Hadamard, *Sur la stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe* (*Association française pour l'avancement des Sciences,* Congrès de Bordeaux, 1895).

Soient, avec M. Staude [1] et M. Hadamard,

$Ax^2 + By^2 + Cy^2 = 1$ l'équation de l'ellipsoïde d'inertie au point de suspension, rapporté à ses axes;

ξ, η, ζ les coordonnées, par rapport aux mêmes axes, du centre de gravité, multipliées par le poids total du corps;

γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de la verticale descendante.

Pour un corps solide, $\mathcal{F}$ est une constante que l'on peut remplacer par zéro :

$$\mathcal{F} = 0.$$

Nous aurons, d'ailleurs,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega &= -(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta), \\ W &= (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)\frac{\omega^2}{2}, \\ M &= (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)\omega. \end{aligned}\right.$$

Si nous voulons que le corps tourne d'un mouvement uniforme autour de la verticale, nous devrons donner à γ, γ', γ'' et à ω des valeurs telles que toute variation virtuelle qui annule δM annule également $\delta(W + \Omega)$.

Nous avons

$$(15)\qquad \delta M = (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)\delta\omega + 2\omega(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma'\,\delta\gamma''),$$

avec

$$(16)\qquad \gamma\,\delta\gamma + \gamma'\,\delta\gamma' + \gamma''\,\delta\gamma'' = 0,$$

en vertu de l'identité

$$(17)\qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

---

[1] STAUDE, *Acta mathematica*, t. XIV.

D'autre part,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}\delta(\Omega+W) = {} & (A\omega^2\gamma-\xi)\,\delta\gamma+(B\omega^2\gamma'-\eta)\,\delta\gamma'+(C\omega^2\gamma''-\zeta)\,\delta\gamma'' \\ & +(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)\,\omega\,d\omega.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (15) et (18) montrent que, toutes les fois que $\delta M = 0$, on peut écrire

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\delta_M(\Omega+W) = {} & -(A\omega^2\gamma+\xi)\,\delta\gamma \\ & -(B\omega^2\gamma'+\eta)\,\delta\gamma' \\ & -(C\omega^2\gamma''+\zeta)\,\delta\gamma''.\end{aligned}\right.$$

Nous devons exprimer que cette quantité s'annule pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui vérifient l'égalité (16); il faut et il suffit, pour cela, qu'il existe une quantité λ telle que l'on ait

$$\left[(A-\lambda)\gamma+\frac{\xi}{\omega^2}\right]\delta\gamma+\left[(B-\lambda)\gamma+\frac{\eta}{\omega^2}\right]\delta\gamma'+\left[(C-\lambda)\gamma+\frac{\zeta}{\omega^2}\right]\delta\gamma''=0,$$

quels que soient $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$, ou bien telle que l'on ait

$$(20)\quad \frac{\xi}{\omega^2}+(A-\lambda)\gamma=0,\qquad \frac{\eta}{\omega^2}+(B-\lambda)\gamma'=0,\qquad \frac{\zeta}{\omega^2}+(C-\lambda)\gamma''=0.$$

Les égalités (17) et (20) donnent sans peine

$$(21)\qquad \frac{\xi^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{\eta^2}{(B-\lambda)^2}+\frac{\zeta^2}{(C-\lambda)^2}=\omega^2.$$

Si l'on se donne dans le corps la position du point de suspension, ξ, η, ζ, A, B, C sont déterminés; si l'on se donne une valeur arbitraire de λ, l'équation (21) déterminera ω; les équations (20) détermineront alors la direction, dans le corps, d'une droite qui, placée suivant la verticale descendante, pourra servir au corps d'axe de rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

Les résultats ainsi obtenus sont ceux qui ont été indiqués par M. Staude.

Si l'on prend pour λ une valeur infiniment voisine de A, l'équa-

tion (21) donnera pour ω une valeur infiniment grande, tandis que les égalités (20) donneront pour γ' et γ'' des valeurs infiniment petites; le corps tournera donc avec une vitesse infiniment grande autour d'un axe infiniment voisin de l'axe principal d'inertie pris pour axe des x.

Des remarques analogues s'appliquent au cas où λ diffère très peu de B ou de C.

Nous nous proposons maintenant de rechercher celles des rotations ainsi définies qui sont stables.

Dans ce but, l'emploi de notre criterium nous amène à exprimer que l'on a

$$\delta_M^2(\Omega + W) > 0,$$

le signe δ_M^2 se rapportant aux modifications virtuelles qui laissent invariable le moment M de la quantité de mouvement. Or, l'égalité (19) donne

$$\begin{aligned}\delta_M^2(\Omega + W) = &-2(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma'')\omega\,\delta\omega \\ &- [A(\delta\gamma)^2 + B(\delta\gamma')^2 + C(\delta\gamma'')^2]\omega^2 \\ &- (A\omega^2\gamma + \xi)\delta^2\gamma - (B\omega^2\gamma' + \eta)\delta^2\gamma' - (C\omega^2\gamma'' + \zeta)\delta^2\gamma''.\end{aligned}$$

Si nous tenons compte de la relation que l'on tire de l'égalité (15) en égalant δM à 0; de l'identité

$$(22)\qquad (\delta\gamma)^2 + (\delta\gamma')^2 + (\delta\gamma'')^2 + \gamma\,\delta^2\gamma + \gamma'\,\delta^2\gamma' + \gamma''\,\delta^2\gamma'' = 0$$

que donne l'égalité (16); enfin, des égalités (20), nous trouvons

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}\delta_M^2(\Omega + W) = &\frac{4(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma'')^2\omega^2}{A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2} \\ &+ [(\lambda - A)(\delta\gamma)^2 + (\lambda - B)(\delta\gamma')^2 + (\lambda - C)(\delta\gamma'')^2]\omega^2.\end{aligned}\right.$$

L'équilibre sera assurément stable si cette quantité $\delta_M^2(\Omega + W)$ vérifie la condition (22) pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui vérifient la relation (16).

Supposons les quantités A, B, C distinctes et rangées par ordre de

valeurs décroissantes :

$$A > B > C. \tag{24}$$

On peut donner à l'égalité (23) la forme

$$\left\{\begin{aligned} \delta_M^2(\Omega + W) = {} & \frac{4(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma'')^2\omega^2}{A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2} \\ & + [(A - B)(\delta\gamma')^2 + (A - C)(\delta\gamma'')^2]\omega^2 \\ & + [(\delta\gamma)^2 + (\delta\gamma')^2 + (\delta\gamma'')^2](\lambda - A)\omega^2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Sous cette forme (25), on voit que, tant que l'on a

$$\lambda - A \geqq 0,$$

l'inégalité (22) est vérifiée pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui sont compatibles avec la relation (16); il en est encore ainsi pour les valeurs de $(\lambda - A)$ qui sont négatives, mais supérieures à une certaine limite $(\lambda - \alpha)$.

Donc, *toutes les valeurs de λ comprises entre $+\infty$ et une limite inférieure α, moindre que A, sont indiquées par notre criterium comme fournissant des rotations assurément stables.*

La limite inférieure α que nous venons de définir peut-elle être égale ou inférieure à B ?

Remarquons, tout d'abord, que, selon l'égalité (23), le signe de $\delta_M^2(\Omega + W)$ est le signe de

$$\left\{\begin{aligned} L = {} & 4(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma'')^2 \\ & + (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) \\ & \times [(\lambda - A)(\delta\gamma)^2 + (\lambda - B)(\delta\gamma')^2 + (\lambda - C)(\delta\gamma'')^2]. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Donnons à λ une valeur infiniment voisine de B; γ, γ'' auront des valeurs infiniment voisines de zéro; selon l'égalité (16), $\delta\gamma'$ aura une valeur infiniment petite par rapport à l'une au moins des quantités $\delta\gamma$, $\delta\gamma''$; L aura sensiblement le signe de

$$(B - A)(\delta\gamma)^2 + (B - C)(\delta\gamma'')^2.$$

Comme, selon les inégalités (24), (B — A) et (B — C) sont de signes contraires, le signe de cette quantité dépend de la valeur du rapport $\frac{\delta\gamma''}{\delta\gamma'}$; ce ne peut être constamment le signe +. Il en résulte que *la limite* α *est supérieure à* B.

Un raisonnement semblable à celui que nous venons de développer nous démontre que, pour les valeurs de λ voisines de C, L et, par conséquent, $\delta_M^2(\Omega - W)$ ont le signe de

$$(C - A)(\delta\gamma)^2 + (C - B)(\delta\gamma')^2.$$

Ce signe est nécessairement le signe — pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui satisfont à l'égalité (16).

Ainsi ni le criterium que nous avons énoncé, ni partant celui de M. Poincaré, qui lui est équivalent, n'indiquent comme stables les rotations qui se produisent autour d'axes très voisins du petit axe d'inertie.

Or, il est très certain qu'un corps solide peut, au moins dans certains cas, subir un mouvement de rotation uniforme et stable autour d'axes infiniment voisins du petit axe d'inertie.

Tout d'abord, si l'on cherche les conditions de stabilité de l'équilibre relatif par la classique méthode des petits mouvements, on trouve, avec M. Hadamard, que les valeurs de λ comprises entre $+\infty$ et a, a étant compris entre A et B, conduisent à des rotations stables, ainsi que les valeurs de λ comprises entre b et c, b étant inférieur à B et supérieur à C, et c étant inférieur à C.

On pourrait, il est vrai, prétendre que, dans ce cas, le criterium tiré de l'étude des petits mouvements est en défaut; il est impossible, en effet, de démontrer rigoureusement que ce criterium est ou suffisant, ou nécessaire, pour la stabilité de l'équilibre relatif.

Mais, dans le cas où le corps solide est suspendu par son centre de gravité, l'étude directe de la polhodie prouve que la rotation autour du petit axe d'inertie est stable [1]. On en peut conclure qu'un corps

[1] Voir APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, 1896, p. 220.

solide pesant, suspendu par un point voisin de son centre de gravité, peut être animé d'une rotation uniforme et stable autour de certains axes très voisins du petit axe d'inertie.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *Ni le criterium donné par M. H. Poincaré, ni celui que nous avons énoncé, et qui lui est équivalent, ne sont nécessairement vérifiés lorsque l'équilibre relatif est stable.*

Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

I.

Définitions. Formules fondamentales. — Σ étant une surface de révolution quelconque et A un point de l'espace, on coupe Σ par le plan méridien passant par A. Si du point A on mène une tangente AA_0 à la section méridienne obtenue M, et si on la prolonge d'une longueur $A_0A_1 = AA_0$ au delà du point de contact A_0, le point A_1 auquel on arrive est le *point correspondant* de A. Le point A a évidemment autant de points correspondants A_1 que la ligne méridienne M a de tangentes issues de A.

Cette construction, appliquée à chaque point d'une figure quelconque, constitue une transformation géométrique remarquable qu'on appelle *symétrie tangentielle par rapport à la surface de révolution* Σ (*surface fondamentale*).

Les points de la surface Σ (qu'on suppose de révolution autour de l'axe des z) sont rapportés aux parallèles ($u =$ const.) et à un système de génératrices égales ($v =$ const.). Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_0(\xi, \eta, \zeta)$ sont trois points correspondants des figures symétriques F, F_1 et de la surface Σ, on a

$$(1) \qquad \xi = \rho\cos(u+v), \qquad \eta = \rho\sin(u+v), \qquad \zeta = \zeta(u),$$

ρ et ζ (fonctions de u) étant les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne de Σ.

Les cosinus directeurs des tangentes au parallèle $u = \text{const.}$ et à la génératrice $v = \text{const.}$ sont respectivement proportionnels aux dérivées

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial\eta}{\partial v}, \frac{\partial\zeta}{\partial v}\right), \qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\eta}{\partial u}, \frac{\partial\zeta}{\partial u}\right).$$

Conséquemment, les cosinus directeurs de la normale à la surface Σ sont proportionnels aux différences

$$\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u} = \rho\zeta' \cos(u+v), \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} = \rho\zeta' \sin(u+v),$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} = -\rho\rho',$$

et comme les cosinus directeurs de la droite AA_0A_1 sont proportionnels aux différences

$$x - \rho\cos(u+v), \quad y - \rho\sin(u+v), \quad z - \zeta,$$

la condition d'orthogonalité entre la droite AA_0A_1 et la normale de la surface Σ est exprimée par l'équation

$$(2) \qquad x\cos(u+v) + y\sin(u+v) = \rho + \frac{(z-\zeta)\rho'}{\zeta'}.$$

La condition que la droite AA_0A_1 rencontre l'axe de la surface Σ est exprimée par la relation

$$(3) \qquad x\sin(u+v) - y\cos(u+v) = 0.$$

Si l'on ajoute les équations (2), (3), après les avoir élevées au carré, on trouve que les conditions (2), (3) peuvent être remplacées par les autres

$$(4) \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \rho + \frac{(z-\zeta)\rho'}{\zeta'}.$$

$$(5) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(u+v).$$

En remarquant, enfin, que le point A_0 est le milieu du segment AA_1,

on a

$$(6)\qquad x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = 2\eta - y, \qquad z_1 = 2\zeta - z.$$

Les équations (1), (4), (5), (6) constituent les formules fondamentales de la transformation.

Dans la symétrie des surfaces, u et v sont à regarder comme des paramètres indépendants. Dans la symétrie des lignes, on doit attribuer à v une valeur constante quelconque (préférablement $v = 0$).

Quand la figure primitive est une $\left\{\begin{matrix}\text{surface S}\\ \text{ligne L}\end{matrix}\right\}$ la figure symétrique est, en général, une $\left\{\begin{matrix}\text{surface } S_1\\ \text{ligne } L_1\end{matrix}\right\}$.

Dans le dernier cas, le lieu des points de contact A_0 entre les droites AA_0A_1 et la surface Σ est une ligne Λ, qu'on peut appeler la *projection tangentielle* de la ligne L sur la surface Σ.

Il s'ensuit qu'on peut se proposer les six questions suivantes :

On donne	(A) Σ et S,	*déterminer*	S_1.
	(B) S et S_1,		Σ.
	(C) Σ et L,		Λ et L_1.
	(D) Σ et Λ,		L et L_1.
	(E) L et Λ,		Σ et L_1.
	(F) L et L_1,		Σ et Λ.

II.

Résolution des questions (A), (C). — En supposant que la ligne méridienne de Σ soit représentée par l'équation

$$(7)\qquad \zeta = \varphi(\rho),$$

la première condition (4) se réduit à

$$(8)\qquad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho + \frac{z - \varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}.$$

D'ailleurs, en remplaçant $\sin(u+c)$, $\cos(u+c)$ par les valeurs qu'on déduit de la condition (5), les équations (1) donnent

$$(9)\qquad \xi = \frac{\rho x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \eta = \frac{\rho y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \zeta = \varphi(\rho).$$

Les coordonnées x, y, z sont évidemment des fonctions de deux paramètres t, w, ou d'un seul paramètre t, suivant que la figure primitive F est une surface ou une ligne. En ayant recours à la condition (8), on peut éliminer un des trois paramètres ρ, t, w dans le premier cas, et un des deux paramètres ρ, t dans le second cas. Après cela, les équations (6), où ξ, η, ζ ont les valeurs (9), définissent, dans tout cas, la figure F_1 symétrique de F.

Les équations (9), quand la figure primitive est une ligne L, définissent sa projection tangentielle Λ.

Résolution de la question (D). — La surface Σ est définie par sa ligne méridienne (7). La projection tangentielle Λ est évidemment connue aussitôt que l'on donne sa projection équatoriale Λ_0 :

$$(10)\qquad \rho = \lambda(u).$$

Comme on a, dans ce cas,

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{x},$$

la condition (8) donne

$$\begin{aligned} z = {} & \varphi\left[\lambda\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right] \\ & + \left[\sqrt{x^2+y^2} - \lambda\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right]\varphi'\left[\lambda\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

Cette équation représente la surface réglée K, lieu des tangentes aux lignes méridiennes de la surface Σ, le long de la ligne Λ suivant laquelle cette surface est coupée par le cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe de Σ et dont la section droite est la courbe (10).

La question (D) a une infinité de solutions, car les lignes L, L_1 tracées sur la surface K sont assujetties à la seule condition d'être des courbes symétriques par rapport à la ligne Λ.

Résolution de la question (E). — En supposant que la ligne primitive L et la projection tangentielle Λ soient définies respectivement par les équations

$$(11)\qquad \begin{aligned} x &= R\cos u, & y &= R\sin u, & z &= z(u),\\ \xi &= \rho\cos u, & \eta &= \rho\sin u, & \zeta &= \zeta(u), \end{aligned}$$

la condition (5) est vérifiée par identité et la condition (4) donne

$$(12)\qquad (R-\rho)\zeta' - (z-\zeta)\rho' = 0.$$

Il s'ensuit que les lignes L, Λ ne sont pas complètement arbitraires.

La condition (12) vérifiée, la ligne méridienne de Σ et la ligne symétrique L_1 sont définies respectivement par les équations

$$\xi_0 = \rho(u), \qquad \zeta_0 = \zeta(u),$$

$$x_1 = (2\rho - R)\cos u, \qquad y_1 = (2\rho - R)\sin u, \qquad z_1 = 2\zeta(u) - z(u).$$

Cas particulier. — Si l'on suppose successivement

$$(13)\qquad z = m\zeta + n, \qquad z\zeta = h$$

(m, n, h étant des constantes), l'équation différentielle (12) se réduit respectivement aux autres

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} (R-\rho)\zeta' - [(m-1)\zeta + n]\rho' &= 0,\\ (R-\rho)\zeta\zeta' - (h-\zeta^2)\rho' &= 0, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit respectivement

$$R = \rho + [(m-1)\zeta + n]\frac{\rho'}{\zeta'}, \qquad \zeta = \left(\alpha + n\int \frac{\rho'}{R-\rho}\, e^{-(m-1)\int\frac{\rho' du}{R-\rho}}\, du\right) e^{(m-1)\int\frac{\rho' du}{R-\rho}},$$

$$R = \rho + \frac{(h-\zeta^2)\rho'}{\zeta\zeta'}, \qquad \zeta = e^{-\int\frac{\rho' du}{R-\rho}}\sqrt{\beta + 2h\int \frac{\rho'}{R-\rho}\, e^{2\int\frac{\rho' du}{R-\rho}}\, du}$$

(α, β constantes).

On voit d'ici que, *quand les hauteurs des points correspondants*

des lignes L, Λ *par rapport au plan coordonné* (xy) *sont liées par une relation linéaire, ou bien quand le produit de ces hauteurs est une constante, la question* (E) *peut être résolue complètement en se donnant arbitrairement (en chacun de ces cas) la ligne* Λ, *ou les projections équatoriales des lignes* L, Λ.

Résolution de la question (F). — La ligne primitive L est définie par les équations (11), et la ligne symétrique L_1 par les équations

$$x_1 = R_1 \cos u, \qquad y_1 = R_1 \sin u, \qquad z_1 = z_1(u).$$

Comme on a évidemment

$$(15) \qquad \xi = \frac{R + R_1}{2} \cos u, \qquad \eta = \frac{R + R_1}{2} \sin u, \qquad \zeta = \frac{z(u) + z_1(u)}{2},$$

il suffit de remplacer ρ et ζ, dans l'équation (12), respectivement par $\frac{R + R_1}{2}$ et $\frac{z + z_1}{2}$, ce qui donne

$$(16) \qquad (R - R_1)(z' + z_1') - (z - z_1)(R' + R_1') = 0.$$

Les lignes L, L_1 ne peuvent donc pas être choisies d'une façon absolument arbitraire.

La condition (16) vérifiée par un choix convenable des fonctions R, R_1, z, z_1, la projection tangentielle Λ est définie par les équations (15), et la ligne méridienne de Σ par les équations

$$\rho = \frac{R + R_1}{2}, \qquad \zeta = \frac{z + z_1}{2}.$$

III.

Propriétés remarquables de la transformation. — Si l'on fait tourner la figure constituée par les lignes symétriques L, L_1 et la projection tangentielle Λ autour de l'axe des z, les conditions (4), (5)

sont évidemment vérifiées à chaque instant du mouvement. Par conséquent :

I. *Si* L, L_1 *sont des lignes symétriques par rapport à une surface de révolution* Σ, *les surfaces* S, S_1 *engendrées par la rotation de ces lignes autour de l'axe de* Σ *sont des surfaces symétriques par rapport à* Σ.

Si l'on pose $\sqrt{x^2+y^2}=R$, on voit que les conditions (4), (5) ne changent pas si l'on remplace R, z, ρ, ζ respectivement par les expressions

$$\alpha R + a, \quad \beta z + b, \quad \alpha\rho + a, \quad \beta\zeta + b,$$

ou par les autres

$$\lambda z + l, \quad \mu R + m, \quad \lambda\zeta + l, \quad \mu\rho + n,$$

α, β, λ, μ, a, b, l, m étant des constantes arbitraires.

Si l'on remarque alors que

$$R_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = 2\rho - R, \qquad z_1 = 2\zeta - z,$$

on voit que R_1, z_1 sont remplacés par les expressions

$$\alpha R_1 + a, \qquad \beta z_1 + b$$

ou par les autres

$$\lambda z_1 + l, \qquad \mu R_1 + m.$$

On a donc la propriété générale :

II. *Si* F_1 *est la figure symétrique de* F *par rapport à la surface de révolution* Σ *dont la ligne méridienne est* $\zeta = \varphi(\rho)$, *et* F', F_1 *les figures qu'on construit des figures* F, F_1 *en prenant pour distances* R, R_1 *de leurs points à l'axe de* Σ *les expressions*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha R + a, & \alpha R_1 + a \\ \lambda z + l, & \lambda z_1 + l \end{array} \right\}$$

et pour hauteurs z, z_1 *de leurs points sur le plan coordonné* (xy)

les expressions $\left\{\begin{matrix} \beta z + b, & \beta z_1 + b \\ \mu R + m, & \mu R_1 + m \end{matrix}\right\}$, F_1 *sera la figure symétrique de* F′ *par rapport à la surface de révolution* Σ′ *dont la ligne méridienne est* $\left\{\begin{matrix} \dfrac{\zeta - b}{\beta} = \varphi\left(\dfrac{\rho - a}{\alpha}\right) \\ \dfrac{\rho - l}{\lambda} = \varphi\left(\dfrac{\zeta - m}{\mu}\right) \end{matrix}\right\}$.

Quand les figures F, F_1 *sont des lignes* L, L_1, *la projection tangentielle* Λ′ *de la ligne* L′ *sur la surface de révolution* Σ′ *peut se déduire de la projection tangentielle* Λ *de la ligne* L *sur la surface de révolution* Σ, *en prenant pour rayon vecteur* ρ *de la projection équatoriale de la ligne et pour hauteur* ζ *de ses points du plan coordonné* (*xy*) *les expressions* $\left\{\begin{matrix} \alpha\rho + a, & \beta\zeta + b \\ \lambda\zeta + l, & \mu\rho + m \end{matrix}\right\}$.

Si l'on fait successivement ($m = 0$, $n = 0$), $n = 0$, $m = 1$ dans la première équation (13), on a respectivement

$$\zeta = ae^{-\int \frac{\rho\, du}{R - \rho}}, \qquad \zeta = be^{m-1 \int \frac{\rho\, du}{R - \rho}}, \qquad \zeta = n \int \frac{\rho'\, du}{R - \rho},$$

a et b étant des constantes arbitraires.

En désignant par γ une constante, que l'on remplace ζ par $\sqrt{\gamma\zeta}$ dans la deuxième équation (14). Après cela, si l'on identifie l'égalité qu'on va obtenir à la première équation (14), on a les conditions

$$m = 1, \qquad \gamma = \frac{2h}{n}.$$

Cette analyse démontre la propriété suivante :

III. *Soient* Λ *et* L_1 *la projection tangentielle et la courbe symétrique d'une ligne* L

$\left\{\begin{matrix} \textit{tracée sur le plan coordonné } (xy) \\ \textit{tracée sur le plan coordonné } (xy) \\ \textit{de l'espace (les hauteurs } z, \zeta, \textit{ vérifiant la relation } z + \zeta = n) \end{matrix}\right\}$,

par rapport à la surface de révolution Σ *dont la ligne méridienne est* $\zeta = \varphi(\rho)$.

Si Λ', L', L'_1 *sont les lignes qu'on déduit des lignes* Λ, L, L_1 *en prenant, sur les hauteurs relatives aux points de celles-ci, des longueurs*

$$\left\{\begin{array}{l} c\zeta^{1-m},\ cm\zeta^{1-m},\ (2-m)c\left(\frac{z_1}{2}\right)^{1-m} \\ n\log\left(\frac{a}{\zeta}\right),\ n+n\log\left(\frac{a}{\zeta}\right),\ n\log\left(\frac{2a}{z_1}\right)-n \\ \sqrt{\frac{2h\zeta}{n}},\ \sqrt{\frac{hn}{2(n-z)}},\ \frac{(4z_1+n)\sqrt{h}}{\sqrt{6n(z_1+n)}} \end{array}\right\},$$

Λ', L'_1 *seront respectivement la projection tangentielle et la ligne symétrique de* L' *par rapport à la surface de révolution* Σ' *dont la ligne méridienne est*

$$\left\{\begin{array}{l} \zeta = c[\varphi(\rho)]^{1-m} \\ ae^{-\frac{\zeta}{n}} = \varphi(\rho) \\ \frac{n\zeta^2}{2h} = \varphi(\rho) \end{array}\right\}.$$

Le principe I ramène l'étude de la symétrie de deux surfaces de révolution ayant même axe que Σ, à l'étude de la symétrie de leurs lignes méridiennes.

En vertu des principes II et III, à chaque propriété relative à la symétrie tangentielle d'une figure par rapport à une surface de révolution, on en peut associer une autre se déduisant tout de suite de la première, en établissant ainsi une sorte de dualité très féconde dans les applications (*voir* le § IV).

IV.

Cas particuliers et applications. — 1. Si l'on fait $z = 0$ dans l'équation (8), on a

$$R = \rho - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}.$$

Cette équation définit la ligne L_0 le long de laquelle la surface réglée K (§ II, question D) coupe le plan coordonné (xy), aussitôt que l'on donne la projection équatoriale de Λ.

En supposant, par exemple, $\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}$, il résulte

$$R = \tfrac{1}{2}\rho,$$

d'où le théorème :

Si l'on mène les tangentes aux lignes méridiennes d'un paraboloïde, le long d'une ligne quelconque Λ, *la surface réglée* K *qu'on engendre coupe le plan coordonné* (xy) *suivant la ligne* L_0, *lieu des milieux des rayons vecteurs qui vont aux points de la projection équatoriale de la ligne* Λ.

2. Quand on suppose que les coordonnées ξ, η, ζ sont proportionnelles respectivement aux coordonnées x, y, z, la condition $\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$ nous apprend qu'on doit avoir

$$\xi = \alpha x, \qquad \eta = \alpha y, \qquad \zeta = \beta z,$$

α et β étant des constantes.

Et, comme on déduit, à l'aide de l'équation (4),

$$z = c\mathrm{R}^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}}, \qquad \zeta = c\beta\alpha^{-\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}}\rho^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}},$$

$$z_1 = c(2\beta - 1)(2\alpha - 1)^{-\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}}\mathrm{R}_1^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}},$$

c étant une constante, on a le théorème : *Quand les coordonnées* ξ, η, ζ *sont proportionnelles aux* x, y, z, *les coordonnées* x_1, y_1, z_1 *sont aussi proportionnelles aux* x, y, z. *Les lignes* L, Λ, L_1 *sont tracées sur des surfaces de révolution* S, Σ, S_1 *ayant pour lignes méridiennes des paraboles générales du même ordre.*

Celles-ci se réduisent à des paraboles ordinaires pour $\beta = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, à des hyperboles équilatères pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+2\alpha}$, etc.

3. En posant $\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{R}$, et en supposant que la ligne primitive L soit placée sur une surface de révolution s ayant pour méridienne la ligne

$$z = \mathrm{F}(\mathrm{R}), \tag{17}$$

la condition (8) donne

$$\mathrm{R}\varphi'(\rho) - \mathrm{F}(\mathrm{R}) = \rho\varphi'(\rho) - \varphi(\rho). \tag{18}$$

Si donc les rayons vecteurs ρ, R sont liés par une des relations

$$\rho = \psi(R), \tag{19}$$

$$R = \chi(\rho), \tag{20}$$

l'équation (18) se réduit respectivement à

$$\begin{gathered} F(R) = [R - \psi(R)]\varphi'[\psi(R)] + \varphi[\psi(R)], \\ [\chi(\rho) - \rho]\varphi'(\rho) + \varphi(\rho) = F[\chi(\rho)]. \end{gathered} \tag{21}$$

Celle-ci donne par intégration

$$\varphi(\rho) = \left\{ \int \frac{F[\chi(\rho)]}{\chi(\rho) - \rho} e^{\int \frac{d\rho}{\chi(\rho) - \rho}} d\rho + c \right\} e^{-\int \frac{d\rho}{\chi(\rho) - \rho}}, \tag{22}$$

c étant une constante arbitraire. On reconnaît d'ici que :

Quand on donne d'une façon arbitraire :

α. *les lignes méridiennes* (7), (17) *des surfaces de révolution* Σ, S;
β. *la ligne méridienne* (7) *de la surface fondamentale* Σ *et la relation* (19) *entre les rayons vecteurs* ρ, R;
γ. *la ligne méridienne* (17) *de la surface de révolution* S *et la relation* (20) *entre les rayons vecteurs* ρ, R;

les équations (18), (21), (22) *donnent respectivement :*

α. *la relation entre les rayons vecteurs* ρ, R;
β. *la ligne méridienne de la surface de révolution* S;
γ. *la ligne méridienne de la surface fondamentale* Σ.

Exemples. — 1° En supposant que Σ et S soient deux paraboloïdes, on a

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}, \qquad F(R) = \frac{R^2}{b}$$

et la relation (18) donne

$$\frac{R}{\rho} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ab}}{a}.$$

Si, *vice versa*, on suppose

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}, \qquad \rho = kR,$$

la relation (21) donne

$$F(R) = k(2-k)\frac{R^2}{a}.$$

D'où le théorème :

Quand la surface fondamentale Σ *est un paraboloïde, la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L *soit tracée sur un autre paraboloïde est que les projections équatoriales des lignes* L, Λ *soient des courbes homothétiques par rapport à l'origine; et la ligne symétrique* L_1 *est placée sur un autre paraboloïde.*

2° Que l'on suppose

$$F(R) = 0, \qquad \chi(\rho) = \frac{\rho}{k}$$

dans l'équation (22). On en déduit

$$\zeta = \varphi(\rho) = c\rho^{\frac{k}{k-1}}. \tag{23}$$

Et comme

$$R_1 = 2\rho - R = \frac{2k-1}{k}\rho, \qquad z_1 = 2\zeta,$$

et conséquemment

$$z_1 = 2c\left(\frac{k}{2k-1}R_1\right)^{\frac{k}{2k-1}}, \tag{24}$$

on conclut :

Si la ligne primitive L, *placée sur le plan coordonné* (xy), *et la projection équatoriale* Λ_0 *de* Λ *sont des courbes homothétiques par rapport à l'origine* $\left(\frac{\rho}{R} = k\right)$, *la surface fondamentale* Σ *et la surface de révolution* S_1 *engendrée par la ligne symétrique* L_1 *ont pour lignes méridiennes les paraboles générales* (23), (24).

En particulier, ce théorème est applicable :

Quand la ligne primitive L est une droite du plan $z = 0$, et la projection tangentielle A est sur un plan parallèle à la droite L et à l'axe de la surface Σ;

Quand la ligne primitive L est un cercle du plan $z = 0$, et la projection tangentielle A est sur un cylindre circulaire, avec la condition que le centre de similitude entre la section droite de ce cylindre et le cercle L soit à l'origine, etc.

Pour $k = 2$, les courbes (23), (24) sont des paraboles ordinaires; pour $k = \frac{1}{2}$, elles sont des hyperboles équilatères rapportées aux asymptotes, etc.

3° En supposant

$$F(R) = 0, \qquad \chi(\rho) = \frac{a^2}{\rho},$$

l'équation (22) donne

$$\varphi(\rho) = \sqrt{\alpha(\rho^2 - a^2)}. \tag{25}$$

Si l'on suppose, *vice versa*, que la fonction $\varphi(\rho)$ soit donnée par l'équation (25), et que, en outre, la fonction $F(R)$ se réduise à *zéro*, l'équation (18) donne

$$R\rho = a^2.$$

Il s'ensuit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L, *tracée sur le plan coordonné* (xy), *et la projection équatoriale* A_0 *de* A *soient des courbes inverses par rapport à l'origine, est que* Σ *soit une surface du deuxième ordre ayant son centre à l'origine.*

En particulier : *Une droite ou un cercle, placés dans le plan de l'équateur d'une surface de révolution du deuxième ordre à centre, ont pour projection tangentielle, sur cette surface, une ligne* A *dont la projection équatoriale* A_0 *est un cercle.*

4° Quand $F(R) = 0$, on trouve que la condition

$$\chi(\rho) = \rho - a$$

équivaut à l'autre

$$\varphi(\rho) = ce^{\frac{\rho}{a}}.$$

On en conclut que *la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L, *placée sur le plan coordonné* (xy), *soit une conchoïde de la projection équatoriale* Λ_0 *de la ligne* $\Lambda(R = \rho - a)$, *est que la ligne méridienne de la surface fondamentale* Σ *soit la courbe logarithmique* $\zeta = ce^{\frac{\rho}{a}}$.

5° En supposant successivement

$$\left[F(R) = R\cot\theta,\ \chi(\rho) = \frac{a^2}{\rho}\right], \qquad \left[F(R) = R\cot\theta,\ \chi(\rho) = \frac{\rho}{a}\right],$$

θ, a, étant des constantes, on trouve, à l'aide de l'équation (22),

$$\varphi(\rho) = \rho\cot\theta + \sqrt{m(\rho^2 - a^2)}, \qquad \varphi(\rho) = \rho\cot\theta + m\rho^{\frac{k}{k-1}},$$

m étant une constante.

On a donc le théorème : *Quand la ligne primitive* L *est placée sur un cône de révolution et les projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont des courbes inverses* $(R\rho = a^2)$, *ou des courbes homothétiques* $\left(\frac{\rho}{R} = k\right)$, *par rapport à l'origine, la surface de révolution fondamentale* Σ *a pour ligne méridienne respectivement la conique*

$$(\cot^2\theta - m)\rho^2 - 2\cot\theta\rho\zeta + \zeta^2 + a^2 m = 0,$$

ou la parabole générale

$$\zeta = \rho\cot\theta + m\rho^{\frac{k}{k-1}},$$

θ *étant le demi-angle au sommet du cône.*

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ le cône contenant L se réduit au plan coordonné (xy) et l'on tombe sur des résultats trouvés précédemment. (Exemples 2° et 3°.)

Quand la parabole générale se réduit à une conique, elle est nécessairement une parabole $(k = 2)$, ou une hyperbole $(k = \frac{1}{2})$.

4. Le plan coordonné (xy) peut être considéré comme une surface de révolution dont la ligne méridienne est l'axe des x.

Dans cette hypothèse, la condition (8) donne

$$x = \rho - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)},$$

d'où, en vertu des équations (6),

$$x_1 = \rho + \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 2\varphi(\rho).$$

Si donc on a recours au principe I, on a : *La surface symétrique du plan coordonné (xy) par rapport à la surface de révolution dont la ligne méridienne est la courbe* (7), *est la surface de révolution dont la ligne méridienne est définie par les équations*

$$(26) \qquad x_{10} = \rho + \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}, \qquad z_{10} = 2\varphi(\rho).$$

Exemples. — 1° En supposant $\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}$, on déduit

$$z_{10} = \frac{8}{9}\frac{x_{10}^2}{a}.$$

Donc : *La surface symétrique du plan tangent au sommet d'un paraboloïde de révolution, par rapport à cette surface, est un autre paraboloïde.*

2° Si l'on suppose $z_{10} = x_{10}\cot\theta$, θ étant une constante, les équations (26) donnent

$$[\rho\varphi(\rho)]'\cot\theta = 2\varphi(\rho)\varphi'(\rho),$$

et comme on déduit de là, par intégration,

$$\varphi^2(\rho) - \cot\theta\,\rho\,\varphi(\rho) + c = 0,$$

c étant une constante, on a : *La surface de révolution* Σ, *par rapport à laquelle le plan coordonné (xy) a pour surface symétrique*

un cône de révolution dont le sommet est à l'origine, a pour ligne méridienne l'hyperbole

$$\xi^2 - \cot\theta\,\zeta\rho + c = 0.$$

5. Si l'on a recours à la transformation donnée par le principe II du § III, quand on y suppose $\left\{\begin{matrix}\alpha = 1, & \beta = 1, & h = 0, \\ \lambda = 1, & l = 0, & \mu = 1, & m = 0\end{matrix}\right\}$, le théorème de l'application 3 conduit immédiatement à un autre théorème qui se déduit de celui-ci en remplaçant $\left\{\begin{matrix}\mathrm{R}, & \rho \\ \mathrm{R}, & \rho, & z, & \zeta\end{matrix}\right\}$ respectivement par $\left\{\begin{matrix}\mathrm{R}+a, & \rho+a \\ z, & \zeta, & \mathrm{R}, & \rho\end{matrix}\right\}$.

Ainsi, par exemple, le théorème de l'exemple 1° dans l'application 3, en vertu de la première transformation qu'on vient d'indiquer, donne :

Quand la surface fondamentale Σ *a pour ligne méridienne une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe de la surface, la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L *soit placée sur une surface de révolution* S *de la même nature que* Σ, *est que les rayons vecteurs* ρ, R *soient liés par une relation linéaire. La ligne symétrique* L_1 *est tracée sur une surface de révolution* S_1 *de la même nature que* Σ *et* S.

6. Appliquons le principe III du § III aux théorèmes des exemples 2°, 3° de l'application 3, et ensuite appliquons aux théorèmes que l'on déduit le principe II, en y supposant $\lambda = 1$, $l = 0$, $\mu = 1$, $m = 0$.

On parvient ainsi aux propriétés suivantes :

Si les $\left\{\begin{matrix}\textit{projections équatoriales} \\ \textit{hauteurs } z,\ \zeta \textit{ relatives aux points}\end{matrix}\right\}$ *des lignes* L, Λ *sont* $\left\{\begin{matrix}\textit{des courbes homothétiques par rapport à l'origine } \left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} = k\right) \\ \textit{proportionnelles } \left(\frac{\zeta}{z} = k\right)\end{matrix}\right\}$ *et si les* $\left\{\begin{matrix}\textit{hauteurs } \zeta,\ z \textit{ relatives aux points} \\ \textit{rayons vecteurs } \rho,\ \mathrm{R} \textit{ des projections équatoriales}\end{matrix}\right\}$ *des*

lignes A, L *sont* $\left\{\begin{array}{l}\textit{liées}\\ \textit{liés}\end{array}\right\}$ *par la relation* $\left\{\begin{array}{l} z = c(1-m)\zeta^m \\ \mathrm{R} = c(1-m)\rho^m \end{array}\right\}$ (*c, m étant des constantes, la surface fondamentale* Σ *et la surface de révolution* S_1 *engendrée par la ligne symétrique* L_1 *ont pour lignes méridiennes les paraboles générales*

$$\left\{\begin{array}{ll} \zeta = c^{1-m}\rho^{\frac{km}{k-1}}; & z_1 = (1-m)c^{1-m}\left(\dfrac{k}{2k-1}\mathrm{R}_1\right)^{\frac{km}{k-1}} \\ \rho = c^{1-m}\zeta^{\frac{km}{k-1}}; & \mathrm{R}_1 = (1-m)c^{1-m}\left(\dfrac{k}{2k-1}z_1\right)^{\frac{km}{k-1}} \end{array}\right\}.$$

Quand $\left\{\begin{array}{l}\textit{les hauteurs } \zeta, z \textit{ relatives aux points}\\ \textit{les rayons vecteurs } \rho, \mathrm{R} \textit{ des projections équatoriales}\end{array}\right\}$ *des lignes* A, L *sont* $\left\{\begin{array}{l}\textit{liées}\\ \textit{liés}\end{array}\right\}$ *par la relation* $\left\{\begin{array}{l} z = c(1-m)\zeta^m \\ \mathrm{R} = c(1-m)\rho^m \end{array}\right\}$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\left\{\begin{array}{l}\textit{les projections équatoriales}\\ \textit{les hauteurs } \zeta, z \textit{ relatives aux points}\end{array}\right\}$ *des lignes* A, L $\left\{\begin{array}{l}\textit{soient des courbes inverses par rapport à l'origine } (\mathrm{R}\rho = a^2)\\ \textit{donnent un produit constant } (z\zeta = a^2)\end{array}\right\}$ *est que la surface fondamentale* Σ *ait pour méridienne la ligne* $\left\{\begin{array}{l} \zeta = h(\sqrt{\rho^2 - a^2})^m \\ \rho = h(\sqrt{\zeta^2 - a^2})^m \end{array}\right\}$, *h étant une constante.*

V.

Résolution de la question (B). — S'il s'agit de deux surfaces de révolution S, S_1 ayant pour axes l'axe des z, le principe I du § III ramène la question (B) à la question (F), en remplaçant les surfaces S, S_1 par leurs lignes méridiennes L, L_1.

Dans le cas général, en désignant par v l'angle qu'un plan tournant autour de l'axe des z fait avec le plan coordonné (xz), et par u un paramètre arbitraire indépendant de v, on peut représenter les surfaces S, S_1 respectivement par les équations :

$$(27)\quad x = \mathrm{F}(u, v)\cos v, \qquad y = \mathrm{F}(u, v)\sin v, \qquad z = \Phi(u, v),$$

$$(28)\quad x_1 = f(t, v)\cos v, \qquad y_1 = f(t, v)\sin v, \qquad z_1 = \varphi(t, v),$$

t étant un paramètre indépendant de v et fonction de u, et F, Φ, f, φ désignant des fonctions arbitraires.

Comme il résulte

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{F(u,v)+f(t,v)}{2}\cos v,\\ \eta &= \frac{F(u,v)+f(t,v)}{2}\sin v,\\ \zeta &= \frac{\Phi(u,v)+\varphi(t,v)}{2},\end{aligned}\right.$$

la condition

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{\eta}{\xi}$$

(exprimant que les points correspondants de surfaces S, S_1, Σ sont sur des droites coupant l'axe des z) est vérifiée par identité.

Quant à la condition (4), en remarquant que

$$\rho=\frac{F(u,v)+f(t,v)}{2},\qquad \zeta=\frac{\Phi(u,v)+\varphi(t,v)}{2},$$

elle se réduit à l'autre

$$(30)\qquad (F-f)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{du}\right)=(\Phi-\varphi)\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{du}\right).$$

Il faut, en outre, exprimer que le lieu des milieux des droites qui joignent les couples de points correspondants des surfaces S, S_1 est une surface de révolution Σ ayant pour axe l'axe des z. Cette condition donne lieu aux relations suivantes :

$$(31)\qquad \frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0.$$

On voit d'ici que les surfaces (27), (28) ne peuvent pas être choisies d'une façon arbitraire.

Les conditions (30), (31) vérifiées par un choix convenable des fonctions F, Φ, f, φ et du paramètre t, la surface fondamentale Σ est définie par les équations (29).

Exemple. — En supposant que la surface S soit un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, on a

$$F = \text{fonction de } v = V,$$

et comme $F + f$ et $\Phi + \varphi$ doivent être des fonctions de u [à cause des conditions (31)], on doit avoir

$$f = U - V, \qquad \varphi = U_1 - \Phi(u, v),$$

U et U_1 étant des fonctions de u.

Quant à la condition (30), elle donne

$$\Phi(u, v) = \frac{U_1'}{U'} V - \frac{UU_1' - U_1 U'}{2U'}.$$

On a donc les équations

$$(32) \quad x = V\cos v, \qquad y = V\sin v, \qquad z = \frac{U_1'}{U'} - \frac{UU_1' - U_1 U'}{2U'},$$

$$(33) \quad x_1 = (U - V)\cos v, \quad y_1 = (U - V)\sin v, \quad z_1 = -\frac{U_1'}{U'} V + \frac{UU_1' + U_1 U'}{2U'},$$

$$\xi = \frac{U}{2}\cos v, \qquad \eta = \frac{U}{2}\sin v, \qquad \zeta = \frac{U_1}{2}.$$

Celles-ci démontrent le théorème : *Les équations* (33) (*dans lesquelles* U, U_1 *sont des fonctions arbitraires de* u) *représentent la famille complète de surfaces qu'on peut regarder comme des surfaces symétriques du cylindre arbitraire* (32). *La surface fondamentale* Σ *a pour ligne méridienne la courbe*

$$\rho = \frac{U}{2}, \qquad \zeta = \frac{U_1}{2}.$$

En particulier, si l'on suppose

$$V = \frac{m}{\cos v}, \qquad U = 2u, \qquad U_1 = \frac{2u^2}{n}$$

(m et n étant des constantes) dans les équations (32), (33) et ensuite on élimine les paramètres u, v, on a : *Entre les surfaces* S_1 *symétriques du plan* $x = m$ *il y a la surface du quatrième ordre*

$$4nx_1^2 z_1 = (x_1^2 + y_1^2)(3x_1^2 + 2mx_1 - m^2).$$

La surface fondamentale Σ *est le paraboloïde ayant pour ligne méridienne la parabole*

$$\zeta = \frac{\rho^2}{n}.$$

Dans la résolution de la question B, on peut appliquer les principes démontrés au § III, en déduisant ainsi des propriétés remarquables, relatives à la symétrie des surfaces, sans aucun développement de calcul.

Nous nous bornons aux exemples qu'on déduit en appliquant au dernier cas particulier le principe II, en y supposant successivement

$$(\lambda = 1,\ l = 0,\ \mu = 1,\ m = 0), \qquad (\alpha = 1,\ \beta = 1,\ h = 0).$$

On trouve respectivement

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{2mu}{n\cos v} - \dfrac{u^2}{n}\right)\cos v, & y = \left(\dfrac{2mu}{n\cos v} - \dfrac{u^2}{n}\right)\sin v, & z = \dfrac{m}{\cos v}, \\ x_1 = \left(\dfrac{3u^2}{n} - \dfrac{2mu}{n\cos v}\right)\cos v, & y_1 = \left(\dfrac{3u^2}{n} - \dfrac{2mu}{n\cos v}\right)\sin v, & z_1 = 2u - \dfrac{m}{\cos v}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{m}{\cos v} + h\right)\cos v, & y = \left(\dfrac{m}{\cos v} + h\right)\sin v, & z = \dfrac{2mu}{n\cos v} - \dfrac{u^2}{n}, \\ x_1 = \left(2u - \dfrac{m}{\cos v} + h\right)\cos v, & y_1 = \left(2u - \dfrac{m}{\cos v} + h\right)\sin v, & z_1 = \dfrac{3u^2}{n} - \dfrac{2mu}{n\cos v}. \end{cases}$$

En éliminant u et v entre les deux couples d'équations, on a les théorèmes :

Entre les surfaces S_1 *symétriques* $\left\{\begin{array}{l}\textit{de la surface du quatrième} \\ \textit{du cylindre dont la section}\end{array}\right.$ *ordre* $x^2 z^2 = m^2(x^2 + y^2)$ *droite est la conchoïde de Nicomède* $R = \dfrac{m}{\cos v} + h$ $\Big\}$, *il y a la sur-*

face du huitième ordre

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_1^2(2nx_1-mz_1)^2(x_1^2+y_1^2)=[3x_1^2z_1^2-m^2(x_1^2+y_1^2)]^2 \\ 4h^2(3x_1+m)^2(x_1^2+y_1^2)x_1^2=[(3x_1^2+2mx_1-m^2)(x_1^2+y_1^2)+3h^2x_1^2-4nx_1^2z_1]^2 \end{array}\right\}.$$

La surface fondamentale Σ *a pour ligne méridienne la parabole*

$$\left\{\begin{array}{l} \rho=\dfrac{\zeta^2}{n} \\ \zeta=\dfrac{(\rho+h)^2}{n} \end{array}\right\}.$$

VI.

Un lieu géométrique remarquable. — Soit $L(x, y, z)$ *une ligne fixe et* Σ *une surface de révolution à laquelle on donne un mouvement de translation suivant la direction de son axe. Pour chaque position de* Σ, *on construit la ligne* L_1 *symétrique de* L.

Lieu des lignes L_1.

Soit $A(\xi, \eta, \zeta)$ la projection tangentielle de L sur la surface Σ, à un instant quelconque du mouvement. Si la ligne méridienne de Σ est la courbe (7), on a

$$\xi=\rho\cos u, \qquad \eta=\rho\sin u, \qquad \zeta=\varphi(\rho)+\theta,$$

ρ étant une fonction de u et θ un paramètre indépendant de u.

Comme, en appliquant les conditions (4), (5), on déduit

$$\theta=z-\varphi(\rho)+(\rho-\sqrt{x^2+y^2})\varphi'(\rho), \qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tang} u,$$

les équations (6) nous apprennent que *le lieu des lignes symétriques* L_1 *est la surface* S_1 *définie par les équations*

$$(34) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{(2\rho-\sqrt{x^2+y^2})x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y_1=\dfrac{(2\rho-\sqrt{x^2+y^2})y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ z_1=2(\rho-\sqrt{x^2+y^2})\varphi'(\rho)+z. \end{array}\right.$$

Cas particulier. — Si l'on suppose

$$x = a\cos\left(\frac{t}{a}\right), \qquad y = a\sin\left(\frac{t}{a}\right), \qquad z = \psi(t),$$

a étant une constante et $\psi(t)$ une fonction arbitraire de t, les équations (34) se réduisent aux autres :

$$(35) \qquad \begin{cases} x_1 = (2\rho - a)\cos\left(\frac{t}{a}\right), \\ y_1 = (2\rho - a)\sin\left(\frac{t}{a}\right), \\ z_1 = 2(\rho - a)\varphi'(\rho) + \psi(t). \end{cases}$$

On en conclut :

Quand la ligne L *est donnée d'une façon arbitraire sur un cylindre circulaire de rayon* a, *le lieu des lignes symétriques* L_1 *est la surface* S_1 *engendrée par la ligne plane invariable*

$$(36) \qquad z_0 = (x_0 - a)\varphi'\left(\frac{x_0 + a}{2}\right),$$

dont le plan est doué d'une translation dans la direction de l'axe des z *et d'une rotation autour de cet axe, avec la condition que le rapport de la vitesse de translation à celle de rotation soit* $a\psi'(t)$.

L'équation (36) fournit la ligne génératrice de la surface S_1 quand on donne la surface de révolution Σ.

Ainsi, par exemple, *quand la surface mobile* Σ *est un paraboloïde, la ligne génératrice de la surface* S_1 *est une parabole égale à la ligne méridienne de* Σ, *ayant pour axe l'axe des* z.

Mais si l'on pose

$$(37) \qquad z_0 = \lambda(x_0),$$

on déduit de l'égalité (36)

$$(38) \qquad \zeta = \frac{1}{2}\int \frac{\lambda(2\rho - a)}{\rho - a}\, d\rho.$$

L'équation (38) démontre que *par un choix convenable de la surface mobile* Σ *on peut faire en sorte que la génératrice de la surface* S_1 *soit une courbe* (37) *donnée arbitrairement d'avance.*

Pour que le rapport des vitesses de translation et de rotation soit une constante, il faut et il suffit que $\psi(t)$ soit une fonction linéaire de t. Il s'ensuit que, *quand la ligne fixe* L *est tracée sur un cylindre circulaire, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface* S_1, *lieu des lignes symétriques* L_1, *soit un hélicoïde est que la ligne* L *soit une hélice.*

Si l'on suppose $\psi(t) = 0$ dans les équations (32), on a ce résultat :

Quand la ligne fixe L *est un cercle du plan* (xy) *ayant son centre à l'origine, le lieu des lignes symétriques* L_1 *est la surface de révolution ayant pour ligne méridienne la courbe* (36).

Sur les équations de certains groupes;

PAR M. DE SÉGUIER.

L'objet de ce Travail est l'extension de la méthode indiquée par M. Jordan (*Traité des substitutions*, p. 32) pour la recherche des groupes plusieurs fois transitifs, avec des applications aux groupes connus d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$, $p^n(p^n-1)$, $p^n(p^{2n}-1)$. J'ai été ainsi amené à reprendre et à compléter les recherches de Mathieu sur les groupes de degré $q=2p+1$, q et p étant premiers.

J'établirai d'abord certains théorèmes relatifs à la définition des groupes (finis ou non). Ils ont déjà été énoncés [1]; je ne crois pas qu'ils aient été démontrés rigoureusement.

Soit S un système d'équations $F_1=1$, $F_2=1$, ... entre les générateurs a_1, a_2, ... définissant un groupe G. Les F_i pourront contenir des a_i^{-1}. *Chacune de ses conséquences peut, par des transformations identiques (c'est-à-dire ne supposant aucune équation autre que $a_i a_i^{-1}=1$ entre des produits formellement distincts), être mise sous la forme typique* $\Pi_{V,F} V^{-1}FV=1$, F *parcourant un système de* $F_i^{\pm 1}$ *où le même peut revenir plusieurs fois*, V *parcourant, indépendamment de* F, *des produits quelconques de* a_i *et de* a_i^{-1}, *et* V^{-1} *étant écrit de manière que* $V^{-1}V=1$ *identiquement* (il en sera toujours de même pour les autres lettres affectées de l'exposant -1). En effet, S est sous forme typique. Supposons qu'on en ait déduit un

[1] *Cf.* YOUNG, *A. J.*, t. XV, 1893; HÖLDER, *M. A.*, t. XLIII, 1893.

système de conséquences sous forme typique formant avec S un système S'. La transformation qui ramène une équation à la forme typique étant identique n'altère pas sa valeur logique, et l'on pourra, dans toute déduction, prendre sous forme typique chaque équation dont on se sert. Il suffit donc de montrer que toute conséquence de S peut être mise sous forme typique. Or on ne peut déduire une conséquence d'un système d'équations que par la répétition de deux opérations : multiplier les deux membres d'une équation par un même facteur, substituer à un produit d'éléments un autre produit égal (identiquement ou non). Le résultat de la multiplication des deux membres de $HV^{-1}FV = 1$ par A s'écrit identiquement $HA^{-1}V^{-1}FVA = 1$ qui a la forme typique. Soient $ABC = 1$, $\Phi = 1$ deux équations de S', la seconde équivalant identiquement à $B = D$. Φ sera de l'une des formes $B^{-1}D$, DB^{-1}, BD^{-1}, $D^{-1}B$. Le résultat de la substitution de D à B s'écrira donc identiquement, ou $ABCC^{-1}B^{-1}DC = 1$, c'est-à-dire $ABC.C^{-1}\Phi^{\pm 1}C = 1$, ou $ADB^{-1}A^{-1}.ABC = 1$, c'est-à-dire $A\Phi^{\pm 1}A^{-1}.ABC = 1$, donc toujours sous forme typique.

Supposons que, dans les équations d'un système S définissant un groupe G, figurent deux séries de générateurs $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ et désignons d'une manière générale par $X(a_i) = X(a)$, $X(b_i) = X(b)$ des produits des $a^{\pm 1}$ seuls ou des $b^{\pm 1}$ seuls, par $X_{a=1}$, $X_{b=1}$, ce que devient le produit de générateurs X ou le système d'équations X, quand on y remplace les a ou les b par 1. Il est clair que, si $\Phi = 1$ résulte de S, $\Phi_{b=1} = 1$ résultera de $S_{b=1}$ et plus généralement si, dans $\Phi = 1$, on fait quelques-uns des b égaux à 1 ou entre eux, le résultat obtenu résultera du système obtenu en faisant les mêmes changements dans S (il suffit pour le voir de faire les mêmes changements dans toutes les déductions conduisant à $\Phi = 1$). Si donc $\Phi = 1$ ne contient que les a, elle résultera de $S_{b=1}$; mais une conséquence de $S_{b=1}$ ne résulte pas en général de S.

Supposons que $S_{a=1}$ définisse un groupe B; en général, $S_{a=1}$ ne résultant pas de S, les conséquences de $S_{a=1}$ ne le seront pas de S, c'est-à-dire que la table de multiplication de B ne fera pas partie de celle de G et que G ne contiendra pas B. S_a étant le système des équations de S où ne figurent que les $a^{\pm 1}$, supposons encore que S_a définisse un groupe A. Ici, S_a résultant de S, les conséquences de S_a le seront de S;

mais G ne contiendra encore pas nécessairement A, parce que S peut identifier des $\alpha(a)$ laissés distincts par S_a. On observera que les conséquences de S dans A résultant toutes de $S_{b=1}$, G contiendra A si $S_{b=1}$ résulte de S_a. Je me bornerai au cas important où S a la forme

$$A_i(a) = 1, \qquad B_j(b) = A'_j(a), \qquad b_k^{-1} a_l b_k = A_l^{b_k}(a)$$
$$(i, j, k, l = 1, 2, \ldots).$$

Si $A'_j = 1$, G contiendra B, car alors $S_{a=1}$ équivaut au système S_b des $B_j = 1$. Si $A'_j = 1$, $A_l^{b_k} = a_l$, G contient A. En posant $A_l^{b_k}(A_i^{b_m}) = A_l^{b_k b_m}$, et généralement $A_l^{\beta(b)}(A_i^{\gamma(b)}) = A_l^{\beta(b)\gamma(b)}$, d'où $A_l^{\beta(b)[\gamma(b)\delta(b)]} = A_l^{[\beta(b)\gamma(b)]\delta(b)}$, on aura

$$\beta(b)^{-1} a_l \beta(b) = A_l^{\beta(b)}, \qquad \beta(b)^{-1} \alpha(a) \beta(b) = \alpha(A_i^{\beta(b)}).$$

On pourra donc, en faisant passer les b à droite et les a à gauche, ou inversement, ramener tout élément de G à la forme $\alpha(a)\beta(b)$ ou $\beta(b)\alpha(a)$. Je dis qu'on aura chaque élément de G au moins une fois dans la forme $\alpha\beta$ (ou $\beta\alpha$) en faisant parcourir à α les éléments distincts de A et à β les *éléments distincts de* B (c'est-à-dire les produits que $S_{a=1}$ laisse distincts). En effet, tout $\beta(b)$ est égal dans B (c'est-à-dire en vertu de $S_{a=1}$) à un élément β_B de B, les diverses écritures qui représentent β_B dans B représentant en général plusieurs éléments de G. Dans la forme typique $HV^{-1}B_j^{\pm 1}V = 1$ de $\beta\beta_B^{-1} = 1$, remplaçons B_j par $B_j A_j'^{-1}$; l'égalité subsistera en vertu de $B_j = A'_j$. En faisant passer tous les b à gauche, on voit que $HV^{-1}B_j^{\pm 1}V$, donc $\beta\beta_B^{-1}$ sera un $\alpha(a)$; donc $\beta = \alpha\beta_B$. α dépendra en général de l'écriture choisie pour β_B dans B. Mais le système des éléments distincts de $A\beta_B$ n'en dépendra pas et coïncidera avec le système des éléments distincts de $A\beta$. Ainsi β_B parcourant B avec une écriture quelconque, $\Sigma A\beta_B$ (et de même $\Sigma\beta_B A$) fournira au moins une fois chaque élément de G. Si $\beta_B \neq \beta'_B$ dans B, $A\beta_B$ et $A\beta'_B$ n'ont aucun élément commun, car de $\alpha\beta_B = \alpha'\beta'_B$ on déduirait, en remplaçant les a par 1, que $\beta_B = \beta'_B$ dans B. Donc, si un élément $\alpha\beta_B$ est répété, ce sera dans le système $A\beta_B$ où il se trouve, c'est-à-dire sous la forme $\alpha'\beta_B$, α et α' étant distincts *dans* A, c'est-à-dire en vertu de S_a, mais égaux *dans* G,

c'est-à-dire en vertu de S. Cela n'aura lieu que si S établit entre les a d'autres conséquences que S_a, c'est-à-dire si G ne contient pas A. En adjoignant à S_a toutes les conséquences que S établit entre les a, S et G ne changent pas; mais S_a deviendra un système S_a définissant un groupe A' contenu dans G et dans A. Alors, α' parcourant A', on aura, *sans répétition d'éléments*, $G = A'B = BA'$.

Pour que S n'établisse pas entre les a d'autres relations que S_a, deux conditions sont évidemment nécessaires [1].

1° Comme S donne $A_i(a_l) = A_i(b_k^{-1} a_l b_k) = 1$, il faut que, *dans* A, $A_i(A_l^{b_k}) = 1$ et que les $A_l^{b_k}$ (b_k restant fixe) ne vérifient dans A aucune relation $\Phi(A_l^{b_k}) = 1$ qui ne résulte des $A_i(A_l^{b_k}) = 1$; sans quoi S donnant $b_k^{-1}\Phi(a_l)b_k = \Phi(A_l^{b_k})$ donnerait $\Phi(a) = 1$, qui ne résulte pas de S_a. Cette condition sera dite *d'isomorphisme*. On observera que, $A_i(A_l^{b_k}) = 1$ résultant des $A_i(a) = 1$, $A_i(A_l^{b_k b_m})$ résultera de $A_i(A_l^{b_k}) = 1$, c'est-à-dire de $A_i(a) = 1$, et plus généralement que $A_i(A_l^{\beta^{-1} b})$ résultera de S_a.

2° Il faut que, *dans* A, $A_j'^{-1} a_l A_j'^{-1} = A_l^{B_j^{-1}}$: si G est fini, l'équation répondant aux signes inférieurs résulte de l'autre, comme on le voit en répétant la transformation par A_j'. Cette condition sera dite *de fermeture*. Si les A_j se réduisent à 1, ces deux conditions suffisent pour que toute conséquence de S entre les a résulte du système S' des seules équations $A_i = 1$, $b_k^{-1} a_l b_k = A_l^{b_k}$. En effet, S donne $b_k^{-1} A_j^{-1} b_k a_l b_k^{-1} A_j b_k = A_l^{b_k^{-1} B_j b_k}$. Donc ici, *en vertu de* S', $b_k^{-1} B_j b_k$ et, de même, tout $\beta^{-1} B_j \beta = \mathfrak{B}$ est permutable à a_l, donc à $b_i^{-1} a_l b_i$ (car $b_i^{-1} a_l b_i \mathfrak{B} = b_i^{-1} a_l b_i \mathfrak{B} b_i^{-1} b_i = b_i^{-1} b_i \mathfrak{B} b_i^{-1} a_l b_i = \mathfrak{B} b_i^{-1} a_l b_i$). Donc, dans une conséquence $\Phi = \Pi V_F F^{\pm 1} V_F = 1$ de S (F parcourant les premiers membres des équations de S ramenées à la forme typique), $V_F F^{\pm 1} V_F$ se ramène à la forme $\alpha^{-1} A_i (A_l^{\beta})^{\pm 1} \alpha$, si $F = A_i$, et à la forme $\alpha^{-1} \beta^{-1} B_j^{-1} \beta \alpha$, si $F = B_j$. En faisant passer à gauche tous les $\beta^{-1} B_j^{-1} \beta$, on voit que $\Phi = 1$ prend, *en vertu de* S, la forme $\mathfrak{B}\Phi = 1$, $\mathfrak{B}$, Φ étant les premiers membres de deux conséquences de $S_{a=1}$, S respectivement. Or $\mathfrak{B}$, si l'on y intercale des $b_k^{-1} b_k$ à des places convenables, présente tous les b de Φ dans l'ordre où ils s'y rencontrent.

---

[1] M. Holder (*loc. cit.*) semble affirmer qu'elles sont suffisantes. C'est sur ce point que sa démonstration (en particulier le § 16) m'a laissé quelques doutes.

Ils se détruisent identiquement si $\Phi = 1$ ne lie que les a, et alors $\Phi = 1$, qui équivaut *en vertu de* S′ à une conséquence $\Phi' = 1$ *de* S′, résulte de S′. Si B est cyclique, S donne $b_1^{-1} A'_1 b_1 = A'_1$, donc $A'_1 (A'^{b_1}_1) = A'_1$ doit résulter de S_a. J'appellerai cette nouvelle condition *condition de permutabilité*. Si elle est vérifiée ainsi que les deux autres, toute conséquence $\Phi = 1$ (sous forme typique) de S entre les a résulte encore de S′. En effet, d'après les hypothèses, $F_1 = B_1 A'^{-1}_1$ sera, *en vertu de* S′, permutable aux a et à b_1. On pourra donc, dans Φ, faire passer à gauche d'abord tous les F_i qui y formeront un produit F_1^k, puis, A'_{1j} étant permutable à b_1, tous les B_j qui y formeront un produit $\mathfrak{B}$. Comme plus haut, on devra avoir $k = 0$. Donc F_1 disparaît en vertu de S′ et $\Phi = 1$ résulte de S′.

Or, toutes les fois que S n'établit pas entre les a d'autres conséquences que S′, les conditions d'isomorphisme et de fermeture suffisent pour que G contienne A. En effet, en appelant b'_k la substitution $(a_l, A_l^{b_k})$, a'_h la substitution $(a_l, a_l a_h)$, le groupe engendré par les a', b' (les b' ne sont pas nécessairement tous distincts) vérifie S′ et contient le groupe $A' \equiv A$ [1] engendré par les a'_h. Quand les $A'_j = 1$, la condition de fermeture exprime évidemment que les isomorphismes $(a_l, A_l^{b_k})$ engendrent un groupe homomorphe à B.

1. Soient G un groupe de champ (j'entends par là l'ensemble des symboles) $1, 2, \ldots, n$; A le diviseur fixant 1, B un diviseur quelconque. *Si dans les deux éléments* $x_\alpha = (1\,\alpha \ldots)$, $x_\beta = (1\,\beta \ldots)$ *de* $G(\alpha, \beta \geqq 1)$, α *et* β *appartiennent à un même système d'intransitivité de* B, *on a*

$$x_\alpha \equiv x_\beta \qquad (\mathrm{mod}\, A, B).$$

Car $b = (\alpha\beta \ldots)$ étant dans B, $x_\alpha b x_\beta^{-1} = (1) \ldots$ est dans A, donc x_α dans $A x_\beta B$. *Réciproquement les éléments de* $A x B$ *substituent évidemment à* 1 *les symboles d'un même système d'intransitivité de* B, système qui peut être choisi arbitrairement si G est transitif. Donc,

---

[1] Je représente par cette notation l'isomorphisme holoédrique. Je dirai d'ailleurs désormais, avec M. Klein, *homomorphe* pour *isomorphe*, et *isomorphe* pour *holoédriquement isomorphe*.

si G *est transitif,* (G; A, B) [1] *est le nombre des systèmes d'intransitivité de* G *dans la représentation de* G *relative à* A (*chaque symbole non déplacé par* B *étant ainsi compté comme système d'intransitivité*).

Tout groupe $A = \Sigma a_\lambda$ de substitutions entre les symboles $1, \ldots, n$, $\tau(\neq 0)$ fois transitif divise d'autres groupes de substitutions, par exemple les symétriques dont le champ contient $1, \ldots, n$. Mais on peut se proposer de chercher s'il existe un groupe G_t, $t + \tau$ fois transitif entre les symboles $1, \ldots, n, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$, où A soit le diviseur fixant $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$. Soit d'abord $t = 1$, $G_1 = G$, $\sigma_1 = \sigma$. Si G existe, on aura la décomposition (modd A, A) $G = AXA$, $X = \Sigma_i^m x_i (x_i = 1)$, chaque $x_i \neq 1$ substituant à σ un élément α_i d'un système d'intransitivité distinct de A, m étant le nombre de ces systèmes d'intransitivité (dans le champ effectif de G : l'un d'eux se réduit à σ) qui se réunissent avec σ en un seul système d'intransitivité de G, et $(AXA)^2 = AXA$ ou $XAX = AXA$. Il suffit évidemment qu'on puisse trouver des x_i vérifiant ces conditions, et, si G est primitif, donc A maximum dans G, on aura $G = \{A, x_i\}$.

La recherche de X par tâtonnement est abordable lorsque l'on sait *a priori* que G doit contenir des substitutions du second ordre $(\sigma\alpha_i), \ldots$, qu'on pourra prendre pour x_i. Bornons-nous à ce cas, et soit $F_i = \Sigma_1^{F_i(\nu)} f_{i\mu}$, de générateurs $f_{ik}^0 (k = 1, \ldots, N)$, le diviseur de $A = \Sigma_i^{A_i(\lambda)} F_i r_{i\nu} (r_{i\nu} = 1)$ qui fixe α_i; on aura

$$x_i F_i x_i = F_i.$$

Les conditions d'existence de G deviennent

$$(1) \quad x_i^2 = 1, \quad x_i f_{ik}^0 x_i = f_{i\mu}, \quad x_i r_{i\nu} x_i = a_{\nu'} x_i a_{\nu''}, \quad x_i a_\lambda x_j = a_{\lambda'} x_k a_{\lambda''},$$

μ dépendant de i, k; ν', ν'', i' de i, ν; λ', λ'', k de i, j, λ; $i = 2, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, N$; $\nu = 1, \ldots, (A, F_i)$; $\lambda = 1, \ldots, (A, 1)$; et l'on peut mettre $a_\lambda x_k a_{\lambda'}$ sous la forme $r_{k\beta}^{\lambda} x_k r_{k\gamma}^{\lambda} f_{k\delta}$. Si A est transitif, $i = i$.

---

[1] Je désignerai par (G, A) l'indice de A dans G, par (G; A, B) le nombre des éléments incongrus de G (modd A, B) (cf. FROBENIUS, *Crelle*, t. 101).

Le groupe G′ *défini par le système* S, *formé de ces équations et de celles de* A, *est précisément* G (certaines équations de S peuvent d'ailleurs résulter des autres).

En effet, désignons un instant par G, A les groupes abstraits représentés jusqu'ici par les groupes de substitutions G, A. Les équations (1) donnent $G' = AXA$, donc $(G', 1) \leqq (G, 1)$. Mais, comme G les vérifie, on a aussi $(G', 1) \geqq (G, 1)$, donc $G' = G$. Ainsi S exprime toutes les relations qui existent entre les substitutions génératrices de A et les x_i; autrement dit, toute relation que l'on peut obtenir en formant avec ces substitutions des produits égaux à 1 résulte de S, sans quoi ces substitutions engendreraient un groupe d'ordre $< (G, 1)$.

Si A est transitif, donc $\tau \geqq 1$, $m = 2$, G étant au moins deux fois transitif sera d'ordre pair et contiendra une s_2 [1] s; une conjuguée de s déplacera σ et pourra être prise pour x_2.

Soit $t > 1$ et A transitif. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un groupe* G_t, $t+1$ *fois transitif entre les symboles* $1, \ldots, n, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$, *où* A *est le groupe fixant* $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, F *le groupe fixant* $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$, *sont qu'il existe des substitutions d'ordre* 2, $s_h = (\sigma_{h-1}, \sigma_h)$, ... ($\sigma_0 = 1$ *et les symboles non écrits faisant partie de* $2, \ldots, n$) *telles que*

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} s_h^2 = 1, \qquad s_h f s_h = f_h, \qquad s_1 r s_1 = a' s_1 a'', \\ s_l a s_l = a_l, \qquad (s_i s_{i+1})^3 = f_{i1}, \qquad (s_j s_{j+k})^2 = f_{jk} \\ (h = 1, \ldots, t;\ i = 1, \ldots, t-1;\ j = 1, \ldots, t-2;\ k = 2, \ldots, \\ \quad t-j;\ l = 2, \ldots, t;\ f \text{ parcourt les générateurs de F, } a \text{ ceux} \\ \quad \text{de A qui sont hors de F; } r \text{ un système de restes } \not\equiv 1 \text{ de} \\ \quad \text{A mod F; } a', a'', a_l \text{ sont dans A hors de F; } f_{i1}, f_{jk} \text{ dans F}), \end{array}\right.$$

[1] J'écrirai, d'une manière générale, g^n pour « groupe de degré n », s^n pour « substitution de degré n », en entendant par *degré* d'une substitution le nombre des symboles qu'elle déplace, g_n pour « groupe d'ordre n », s_n pour « substitution d'ordre n ». J'appellerai *pair* un groupe dont toutes les substitutions sont paires. J'appellerai *constituant* d'un groupe intransitif le groupe auquel il se réduit lorsqu'on ne considère que son action sur certains systèmes d'intransitivité.

et ces équations, jointes à celles de A, *définissent* G_t. Il suffit de montrer que le théorème subsiste lorsqu'on remplace t par $t+1$ [la première ligne de (2) se confond avec (1) pour $t=1$, $m=2$]. Or, si G_{t+1} existe, il y a, on l'a vu, une substitution de la forme

$$s_{t+1}=(1)(\sigma_1)\ldots(\sigma_{t-1})(\sigma_t\sigma_{t+1})\ldots,$$

telle que

$$s_{t+1}^2=1,\qquad s_{t+1}G_{t-1}s_{t+1}=G_{t-1},\qquad s_{t+1}G_{t-1}s_tG_{t-1}s_{t+1}\leq G_ts_{t+1}G_t$$

(les restes $\neq 1$, mod G_{t-1} de $G_t=G_{t-1}+G_{t-1}s_tG_{t-1}$ sont tous dans $G_{t-1}s_tG_{t-1}$) et ces équations développées définissent G_{t+1}. Puisque s_{t+1} fixe $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1}$, il résulte de $s_{t+1}G_{t-1}s_{t+1}=G_{t-1}$ que $s_{t+1}Fs_{t+1}=F$, $s_{t+1}As_{t+1}=A$, et $(s_ts_{t+1})^3$, $(s_js_{t+1})^2 (j<t)$ sont évidemment dans F. Inversement, si (2) est vérifié quand on y remplace t par $t+1$, on aura, puisque $G_h=\{A, s_1, \ldots, s_h\}$,

$$s_{t+1}G_{t-1}s_{t+1}=G_{t-1};$$

et l'équation $(s_ts_{t+1})^3=f_{t+1}$ donne

$$s_{t+1}G_{t-1}s_tG_{t-1}s_{t+1}=G_{t-1}s_{t+1}s_ts_{t+1}G_{t-1}=G_{t-1}s_ts_{t+1}s_tG_{t-1}\leq G_ts_{t+1}G_t.$$

Comme $G_1=A+As_1A$, on aura $(s_2As_2=A)$:

$$\begin{aligned}G_2&=G_1+G_1s_2G_1\\&=A+As_2+As_1A+As_1s_2A+As_2s_1A+As_1s_2As_1A.\end{aligned}$$

Chaque complexe du second membre où A figure ρ fois contiendra, α désignant l'ordre de A, α^ρ éléments distincts ne figurant dans aucun autre complexe, car $\Sigma_\rho\alpha^\rho=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$ est précisément l'ordre de G_2.

En observant que $s_1As_1\leq As_1A$, donc que $s_1As_1.A$ est $\leq As_1A$ et $As_1A.s_1A\geq s_1A$, en sorte que

$$As_1s_3As_1A=As_3s_1As_1A=As_3.As.As_1A$$

coïncide avec As_3s_1A, on a de même

$$\begin{aligned}G_3 = {} & A + As_2 + As_3 + As_2s_3 + As_3s_2 + As_2s_3s_2 + As_1A + As_1s_2A \\ & + As_2s_1A + As_1s_3A + As_1s_2s_3A + As_3s_2s_1A + As_1s_3s_2A \\ & + As_3s_2s_1A + As_1s_2s_3s_2A + As_2s_3s_1s_2A + As_2s_3s_2s_1A \\ & + As_1s_2As_1A + As_1s_3As_1A + As_1s_2s_3As_1A + As_1s_3s_2As_1A \\ & + As_1s_2s_3As_1s_2A + As_1s_2s_3s_2As_1A + As_2s_3s_1s_2As_1A \\ & + As_1s_2s_3As_1s_2As_1A,\end{aligned}$$

aucun élément n'étant répété dans le second membre.

En prenant $A = 1$, $\sigma_{h-1} = h$, $s_h = (h, h+1)$, on obtient immédiatement, pour les équations du symétrique de champ $1, 2, \ldots, t$,

$$(3)\quad \begin{cases} s_h^2 = (s_i s_{i+1})^3 = (s_j s_{j+k})^2 = 1, \\ (h = 1, \ldots, t-1;\ \ i = 1, \ldots, t-2;\ \ j = 1, \ldots, t-3;\ \ k = 2, \ldots, t-j-1). \end{cases}$$

Ces équations exprimant toutes les relations qui lient les $(h, h+1)$, il en résulte certainement, puisque

$$(12)(23)\ldots(t-1, t) = (1, 2, \ldots, t),$$

en posant $s_1 = a$, $s_1 \ldots s_{t-1} = b$, que

$$b^t = 1, \qquad s_h = b^{1-h}ab^{h-1},$$

donc aussi

$$(4)\quad \begin{cases} b^t = a^2 = (ab^{-1}ab)^3 = (ab^{-j}ab^j)^2 = 1; \\ j = 2, 3, \ldots, \frac{t}{2}, \text{ si } t \text{ est pair};\quad j = 2, 3, \ldots, \frac{t-1}{2}, \text{ si } t \text{ est impair}. \end{cases}$$

Inversement de (4) on déduit (3) en observant que

$$b^{-h}.ab^{-h}ab^h.b^h = b^{-h}ab^h.b^{-h-k}ab^{h+k},$$

$$ab^j.ab^{-j}ab^j.b^{-j}a = ab^jab^{-j}$$

et en posant

$$b^{1-h}ab^{h-1} = s_h.$$

Donc (4) définit le symétrique de degré t (*Comparer* Moore, *P. L. M. S.*, t. XXVIII, 1896, p. 357).

Prenons pour A l'alterné de champ 1, 2, 3 engendré par

$$c = (123) = (12)(13).$$

En adjoignant les substitutions

$$s_i = (12)(i+2, i+3) \qquad (i = 1, \ldots, n-3;\ n \geq 4)$$

qui vérifient

$$(5)\quad \begin{cases} c^3 = (cs_i)^3 = (cs_l)^2 = s_i^2 = (s_j s_{j+1})^3 = (s_i s_{i+k})^2 = 1, \\ i = 1, \ldots, n-3; \qquad j = 1, \ldots, n-4; \\ k = 2, \ldots, n-i-3; \qquad l = 2, \ldots, n-3 \end{cases}$$

(on supprimera les équations où s aurait un indice > 1 si $n = 4$, ou > 2 si $n = 5$), on a un g^n $n-2$ fois transitif. C'est donc l'alterné $\mathfrak{A}_n$ de degré n, et $\mathfrak{A}_n$ est défini par (1). $\mathfrak{A}_n$ contient une substitution $b = s_{n-3} s_{n-4} \ldots s_2 s_1$ de la forme $(34 \ldots n)$ ou $(12)(34 \ldots n)$, selon que n est impair ou pair et $b^{-i} s_1 b^i = s_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-4$. Donc les équations suivantes (où a est mis pour s_1 et où n est supposé > 5)

$$(6)\quad \begin{cases} b^{n-2} = c^3 = a^2 = (ac)^3 = (ab^{-x}ab)^3 = (ab^{-x}ab^x)^2 = (cb^{-y}ab^y)^2 = 1, \\ x = 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-2) \quad \text{si } n \text{ est pair}, \\ x = 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-3) \quad \text{si } n \text{ est impair}, \\ y = 2, \ldots, n-3 \end{cases}$$

résultent de (5), qui exprime toutes les relations liant les

$$(12)(i+2, i+3) \qquad (i = 0, \ldots, n-3).$$

Inversement de (6) on déduit (5), en observant que

$$b^{-h}.ab^{-k}ab^k.b^h = b^{-h}ab^h.b^{-h-k}ab^{h-k}, \qquad ab^x.ab^{-x}ab^x.b^{-x}a = ab^x ab^{-x}$$

(*cf.* Moore, *loc. cit.*).

2. Prenons $A = \{(z, iz)\}$, z parcourant un corps de Galois $C(p^m)$ d'ordre p^m (p premier) dont i est racine primitive. A fixe le symbole o. Une détermination de G_1 sera le groupe $G = \Sigma(z, \alpha z + \beta)$, β parcourant C, et α C sauf o. C'est d'ailleurs la seule. En effet, dans un $g_{p^m(p^m-1)}G'$ deux fois transitif, de classe $p^m - 1$, il y a $p^{m-1}s_p^{p^m}$ formant avec l'unité un groupe normal H dont tous les éléments sont d'ordre p et conjugués dans G', donc permutables. Donc tout diviseur A' de G', qui fixe un symbole, divise le groupe J des isomorphismes de H. Or les éléments de H peuvent se mettre sous la forme $h = |x_i, x_i + a_i|$ $(i = 1, \ldots, m)$, x_i, a_i parcourant les entiers réels mod p, et celles de s sous la forme

$$j = |x_i, \Sigma_k \alpha_{ik} x_k| \pmod p \qquad (i, k = 1, \ldots, m).$$

Soit A' cyclique. Pour que j soit un générateur de A', donc d'ordre $p^m - 1$, il faut et il suffit que sa congruence caractéristique soit irréductible et appartienne à l'exposant $p^m - 1$ (Jordan, *Traité*, n° 159). Un changement de variables ramène alors j à la forme

$$|X_i, \rho_i X_i| \qquad (i = 0, \ldots, m-1, \ \rho_i = \rho^{p^i})$$

et h a la forme $|X_i, X_i + A_i|$. Les X_i étant conjugués, G' est isomorphe au groupe engendré par $|X_0, \rho X_0|$ et par les $|X_0, X_0 + A_0|$. Or $X_0 = \Sigma_0^{m-1} \rho^i y_i$, $A_0 = \Sigma_0^{m-1} \rho^i b_i$, les y étant des fonctions linéaires indépendantes des x et les b des a (puisque les X sont indépendants et de même les A). Donc $G' = A'H \equiv \Sigma(z, \alpha z + \beta) \equiv G$.

Cherchons les équations de G par la méthode précédente. On aura $G = \{a, b\}$, $a = (iz)$, $b = (01)\ldots$ étant du second ordre et de la forme $(\alpha z + \beta)$; donc $b = (1 - z)$, et G sera défini par les équations

$$a^{p^m-1} = b^2 = 1, \qquad ba^\xi b = a^\eta b a^\zeta,$$

où $\xi = 1, \ldots, p^m - 2$ et où η, ζ sont à déterminer en fonction de ξ.

Or on a

$$ba^\xi b = (i^\xi z + 1 - i^\xi) = (i^{-\xi}(i^\xi - 1), 0, 1 - i^\xi, \ldots),$$

donc

$$a^{\eta} = (i^{-\xi}(i^{\xi}-1), 1, \ldots), \qquad a^{\zeta} = (1, 1-i^{\xi}, \ldots):$$

d'où les deux conditions

$$i^{\eta-\xi}(i^{\xi}-1) = 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p), \qquad i^{\zeta} = 1 - i^{\xi},$$

la dernière déterminant ζ et montrant que, pour $\xi < m$, ζ est $\geq m$, la première donnant ensuite

$$\eta + \zeta - \xi \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(p^m - 1) & \text{si} \quad p > 2 \\ 0 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases} \qquad (\mathrm{mod}\, p^m - 1).$$

Certaines des équations ainsi obtenues pour G pourront résulter des autres et être supprimées : de $ba^{\xi}b = a^{\eta}ba^{\zeta}$, $b^2 = 1$, par exemple, on déduit $ba^{-\xi}b = a^{-\zeta}ba^{-\eta}$, $ba^{\eta}b = a^{\xi}ba^{-\zeta}$, $ba^{-\eta}b = a^{\zeta}ba^{-\xi}$, $ba^{\zeta}b = a^{-\eta}ba^{\xi}$, $ba^{-\zeta}b = a^{-\xi}ba^{\eta}$, et, si $p = 2$, on a

$$ba^{2\xi}b = a^{\eta}ba^{\eta+\zeta}ba^{\zeta} = a^{\eta}ba^{\xi}ba^{\zeta} = a^{2\eta}ba^{2\zeta},$$

d'où, par récurrence,

$$ba^{2^{\lambda}\xi}b = a^{2^{\lambda}\eta}ba^{2^{\lambda}\zeta}.$$

On obtient plus facilement un autre système d'équations comme il suit. Si l'on pose

$$(\sigma + i^{y}) = c_y = a^{-y}c_0a^{y}, \qquad c_0 = c,$$

il est clair que tout élément de G est contenu une fois, et une fois seulement, dans la forme

$$a^{x}c_0^{y_0}\ldots c_{m-1}^{y_{m-1}} \qquad (x = 0, \ldots, p^m - 2;\ y_0, \ldots, y_{m-1} = 0, \ldots, p-1).$$

Si $i^m = \Sigma_0^{m-1}\alpha_s i^s$, les α_s étant réels, $a, c_0, \ldots, c_{m-1}$ vérifieront les équations

$$a^{p^m-1} = c_\rho^p = 1, \qquad c_\rho c_\sigma = c_\sigma c_\rho, \qquad \rho, \sigma = 0, 1, \ldots, m-1;$$

$$a^{-1}c_\tau a = c_{\tau+1}, \qquad \tau = 0, \ldots, m-2; \qquad a^{-1}c_{m-1}a = c_0^{\alpha_0}\ldots c_{m-1}^{\alpha_{m-1}};$$

d'où $c_0, \ldots, c_{m-1}$ s'éliminent immédiatement. Or ces équations définissent un $g_{p^m(p^m-1)}$. Donc les *substitutions* $a, c_0, \ldots, c_{m-1}$ ne vérifient aucune équation qui ne résulte des précédentes.

Soient $p = 3$, $m = 2$. Les deux polynomes irréductibles appartenant à l'exposant 4 sont $z^2 \pm z - 1$. Soit $i^2 \equiv 1 - i$. Pour $\xi = 1$, $\zeta = 2$, $\eta = 3$, et des équations

$$a^8 = b^2 = 1, \qquad bab = a^3 ba^2,$$

on déduit des équations analogues pour $\xi = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, en particulier $ba^3 b = aba^6$, dont le produit avec $bab = a^3 ba^2$ donne $ba^4 b = a^4 ba^4$. Il est donc inutile de faire $\xi = 4$ et le groupe est défini par trois équations. En prenant $i^2 \equiv 1 + i$, on aurait eu $bab = a^2 ba^3$, ce qui revient à changer a en a^{-1}. En écrivant $1, 2, \ldots, 9$ pour $1, i, i^2, \ldots, i^7, 0$, on a

$$a = 12345678, \qquad b = 19.23.47.68.$$

Pour $p = 2$, on a ce théorème (W. Burnside, *M. M.*, 1896, p. 187) que *les équations*

$$a^\lambda = b^2 = 1, \qquad bab = a^{1-m} ba^m$$

définissent un groupe d'ordre $2^{m'}\lambda (m' \leqq m)$ *contenant un diviseur normal abélien d'ordre* $2^{m'}$ *dont tous les éléments* $\neq 1$ *sont d'ordre* 2. En effet, posons

$$a^{-i} ba^i = b_i \qquad (b_0 = b).$$

On aura $b_i b_{i+1} = b_{m+i}$ pour $i = 0$; cela résulte de la troisième équation, qui s'écrit

$$ba^{-1} b = a^{-m} ba^{m-1} \qquad \text{ou} \qquad ba^{-1} ba = a^{-m} ba^m,$$

et, si cela est vrai pour $i \leqq j$, de $b_j b_{j+1} = b_{m+j}$ on déduit

$$a^{-1} b_j b_{j+1} a = a^{-1} b_{m+j} a \qquad \text{ou} \qquad b_{j+1} b_{j+2} = b_{m+j+1}.$$

En outre

$$\begin{aligned} b_i b_{i+k} &= b_i b_{i+1}. b_{i+1} b_{i+2} \ldots b_{i+k-1} b_{i+k} = b_{m+i} b_{m+i+1} \ldots b_{m+i+k-1} \\ &= a^{-m} b_i a^m. a^{-m-1} b_i a^{m+1} \ldots \qquad = a^{-m} b_i b_{i+1} \ldots b_{i+k-1} a^m. \end{aligned}$$

Supposons alors prouvé que $\{b, b_1, \ldots, b_j\} = B_j$ est abélien et a tous ses éléments d'ordre 1 ou 2. Il en sera de même de B_{j+1}; car, pour $i \leq j$, $b_i b_{j+1} = a^{-m} b_i b_{i+1} \ldots b_j a^m$ et $b_i b_{j+1}$ est d'ordre 1 ou 2: donc, ou bien $b_{j+1} = b_i$, ou bien $b_i b_{j+1} = b_{j+1} b_i$. Enfin $b_m, \ldots, b_\lambda$ sont dans B_{m-1}, car $b_{k+1)m+i} = b_{km+i} b_{km+i+1}$ (pour $i = m-1$, le second membre contient $b_{(k+1)m}$ qu'on réduit par la même formule où $i = 0$); $b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ pouvant n'être pas indépendants, B_{m-1} est d'ordre $2^{m'}$, $m' \leq m$.

En revenant donc aux notations précédentes, si à $\xi = 1$ répond $\zeta = m$, donc $\gamma_1 = 1 - m$, les équations $a^{2^m-1} = b^2 = 1$, $bab = a^{1-m} b a^m$ définissent un groupe G′ d'ordre $\leq 2^m(2^m - 1)$. D'ailleurs, G′ est $\geq$ G, dont les équations comprennent celles de G′. Donc G′ = G.

Pour $p = 2$, $m = 3, 4, 6, 7$, il est facile de vérifier que i défini par $i^m \equiv 1 + i \pmod 2$ est racine primitive. Pour $m = 6$, par exemple, on aura

$$i^8 \equiv i^2 + i^3, \qquad i^{10} \equiv i^4 + i^5,$$

$$i^{60} \equiv (1 + i)^{10} \equiv 1 + i^2 + i^8 + i^{10} \equiv 1 + i^3 + i^4 + i^5,$$

$$i^{61} \equiv 1 + i^4 + i^5, \qquad i^{62} \equiv 1 + i^5, \qquad i^{63} \equiv 1,$$

et i^7, i^9, i^{11} sont $\not\equiv 1$. Pour $m = 7$, on aura

$$i^8 \equiv i + i^2, \qquad i^9 \equiv i^2 + i^3,$$

$$i^{63} \equiv (1 + i)^9 \equiv 1 + i + i^8 + i^9 \equiv 1 + i^3,$$

$$i^{126} \equiv (1 + i^3)^2 \equiv 1 + i^6, \qquad i^{127} \equiv 1,$$

et 127 est premier. Pour $m = 5$, i défini par $i^5 \equiv i + 1$ donne $i^{31} \not\equiv 1$ [aussi bien $z^5 + z + 1 \equiv (z^2 + z + 1)(z^3 + z^2 + 1)$ n'est pas irréductible]. Mais, en formant successivement les polynomes réductibles de degré 1, 2, 3, 4, 5, on trouve que les irréductibles sont

$$z + 1, \quad z^2 + z + 1, \quad z^5 + z^2 + 1, \quad z^3 + z + 1, \quad z^4 + z + 1,$$

$$z^4 + z^3 + 1, \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1, \quad z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + 1,$$

$$z^5 + z^4 + z^3 + z + 1, \quad z^5 + z^4 + z^2 + z + 1, \quad z^5 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$z^5 + z^3 + 1, \quad z^5 + z^2 + 1.$$

Soit $i^5 \equiv i^2 + 1$; on aura $i^{18} \equiv i + 1$ et G d'ordre $2^5(2^5 - 1)$ sera défini par $a^{31} = b^2 = 1$, $bab = a^{11} b a^{18}$.

Pour définir le groupe $\mathcal{L}(2, p) = \mathcal{L} = \Sigma\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ d'ordre $p^m(p^{2m}-1)$ où les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parcourent C avec la condition $\alpha\delta - \beta\gamma \not\equiv 0$, z parcourant C et la valeur ∞, il faut ajouter un générateur c représenté par une substitution de $\mathcal{L}$ de la forme $(0\,\infty)\ldots$ ou $\left(\frac{\beta}{z}\right)$ et vérifiant $c^2 = (cb)^3 = 1$, $cac = a^\tau$, τ étant à déterminer. Or

$$(cb)^3 = \left(\frac{z(1-2\beta) + \beta(\beta-1)}{z(1-\beta) - \beta}\right).$$

Donc $\beta = 1$, $cac = a^{-1}$ et les équations de $\mathcal{L}$ s'obtiennent en adjoignant, à celles de G, $c^2 = (cb)^3 = (ca)^2 = 1$. On peut d'ailleurs réduire à deux le nombre des générateurs, car les deux équations $ba^\zeta b = a^\eta ba^\zeta$, $ca^\eta c = a^{-\eta}$ donnent $ca^\eta cba^\zeta b = ba^\zeta$; d'où, en posant $cb = d$, $b = a^{-\zeta} d^2 a^{-\eta} da^\zeta$, $c = db = da^{-\zeta} d^2 a^{-\eta} da^\zeta$, $d^3 = 1$.

Pour $p = 2$, $m = 3$, $p^m(p^{2m}-1) = 504$, $\mathcal{L}$ est simple et défini par

$$(7) \qquad a^7 = b^2 = c^2 = (ca)^2 = (cb)^3 = 1, \qquad bab = a^{-2}ba^3,$$

ou, en posant $cb = d$ et en remplaçant $(ca)^2 = 1$ ou $cac = a^{-1}$ par $ca^{-2}c = a^2$, $b^2 = 1$ par $(a^{-1}ba)^2 = 1$, $c^2 = 1$ par $a^{-1}ca = 1$, $bab = a^{-2}ba^3$ par $ba^6 b = a^4 ba^2$ d'où $b = ad^2 a^3 da^2$,

$$(8) \qquad \begin{cases} a^7 = 1, \qquad d^3 = 1, \qquad (d^3 a^3 da^3)^2 = 1, \\ (da\,d^2 a^3 d)^2 = 1, \qquad (a^6\, da\, d^2 a^3\, da^2)^2 = 1. \end{cases}$$

La troisième et la quatrième donnent

$$d^2 a^3 da^3 = a^4 d^2 a^4 d, \qquad da\,d^2 a^3 d = d^2 a^4 da^6 d^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} a^6\, da\,.\,d^2 a^3\, da^3 &= a^6\, da^5 d^2 a^4 d = a^6\, da^5.\,d^2 a^4\, da^6\, da^5.\,(a^6\, da^5)^{-1} \\ &= a^6\, da^5.\,da\,d^2 a.\,(a^6\, da^5)^{-1} \end{aligned}$$

et le système équivaut à

$$(9) \qquad a^7 = d^3 = (d^2 a^3\, da^3)^2 = (d^2 ad^2 a^3) = (da\,d^2 a)^2 = 1.$$

Si l'on pose $a = (iz)$, $b = (1 - z)$, $c = (z^{-1})$, ou, en écrivant 1, 2, ..., 9 pour 1, i, i^2, ..., i^6, 0, ∞ respectivement, $a = 1234567$, $b = 18.24.37.56$, $c = 89.27.36.45$, (5) exprime toutes les relations qui lient ces trois substitutions, et (8) toutes celles qui lient a et $d = cb = 189.235.467$. Or, en posant

$$beba = \alpha = \left(\frac{iz}{z-1}\right) = 1927635, \qquad aba^6 = \beta = (i^6 - z) = 13.26.45.78,$$

on vérifie les égalités

$$\alpha^7 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = (\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta)^2 = 1, \tag{10}$$

$$\alpha^3\beta\alpha^5 = d, \qquad (\beta\alpha^2\beta d)^2 = (\beta\alpha^2\beta\alpha^3\beta\alpha^5)^2 = a, \tag{11}$$

en formant les substitutions $\alpha\beta$, $\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta$, ... Inversement (9) ou, ce qui revient au même, (8) résulte de (10). Considérons en effet (11) comme définissant a et d. On aura d'abord $d = \alpha^2.\alpha\beta.\alpha^5$, donc $d^3 = 1$, puis, en observant que (10) donne $\beta\alpha^6\beta = \alpha\beta\alpha$ (dont le carré et le cube sont $\beta\alpha^5\beta = \alpha\beta\alpha^2\beta\alpha$, $\beta\alpha^4\beta = \alpha\beta\alpha^2\beta\alpha^2\beta\alpha$), $\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta = \beta\alpha^4\beta\alpha^2\beta\alpha^4$,

$$\begin{aligned} a &= \beta\alpha^2.\beta\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^2.\beta\alpha^3\beta\alpha^5 = \beta\alpha^6\beta.\alpha^2\beta\alpha^4.\beta\alpha^6\beta.\alpha^3\beta\alpha^5 \\ &= \alpha.\beta\alpha^3\beta\alpha^5\beta.\alpha^4\beta\alpha^5 = \alpha^5\beta\alpha^2\beta\alpha^4.\beta\alpha\beta.\alpha^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \alpha^4.\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha.\alpha^2\beta\alpha^4, \\ \alpha^3 a\alpha^4 &= \beta\alpha^4.\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha = \beta\alpha^4\beta\alpha^5\beta, \\ \beta\alpha^4\beta\alpha^3.a.\alpha^4\beta\alpha^3\beta &= \beta\alpha\beta\alpha\beta = \alpha, \\ a^x &= \alpha^4\beta\alpha^3\beta.\alpha^x.\beta\alpha^4\beta\alpha^3; \end{aligned} \tag{12}$$

donc $a^7 = 1$ et

$$\begin{aligned} a^4 &= \alpha^4\beta\alpha^3.\beta\alpha^4\beta\alpha^4\beta\alpha^2.\alpha = \alpha^4.\beta\alpha\beta.\alpha^3\beta\alpha^3\beta\alpha \\ &= \alpha^2.\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha.\alpha^2\beta\alpha = \alpha^2\beta\alpha^5\beta\alpha^2\beta\alpha \\ &= \alpha^2\beta\alpha^5.\beta\alpha^2\beta\alpha^3\beta\alpha^5.(\alpha^2\beta\alpha^5)^{-1}; \end{aligned}$$

donc $(\beta\alpha^2\beta d)^7 = 1$, $(\beta\alpha^2\beta d)^8 = \beta\alpha^2\beta d$, ou $a^4 = \beta\alpha^2\beta d$.

Cela établi, on a

$$d^2a^3da^3 = d^2a^{-4}da^{-4} = d\beta\alpha^5\beta\beta\alpha^5\beta = \alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta,$$

qui est du second ordre d'après (10). Ce résultat donne immédiatement, d'après (12),

$$\begin{aligned} ad^2a^3\,da^3 &= \alpha^5\beta\alpha^2.\beta\alpha\beta.\alpha^3\beta = \alpha^5.\beta\alpha\beta.\alpha^2\beta \\ &= \alpha^4.\beta\alpha\beta = \alpha^3\beta\alpha^6 = d\alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$da\,d^2a^3d = a^3(a^4d.ad^2a^3\,da^3)a^4 = a^3(a^4d^2\alpha)a^4,$$

et, puisque $a^4 = \beta\alpha^2\beta d$,

$$da\,d^2a^3d = a^3\beta\alpha.\alpha\beta\alpha.a^4 = a^3\beta\alpha.\beta.\alpha^6\beta a^4,$$

qui est du second ordre. Enfin, d'après (12) encore,

$$a^6d.ad^2a^3\,da^3 = \alpha^3\beta\alpha^4\beta\alpha^5\beta\alpha^4\beta\alpha^5,$$

$$\alpha^5.a^6\,da\,d^2a^3\,da.\alpha^2 = \alpha\beta\alpha.\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^4\beta = \beta\alpha^6\beta.\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta.\beta\alpha\beta,$$

qui est du second ordre. *Donc* (10) *définit* $\mathfrak{L}$ (*cf.* Burnside, *M. A.*, t. LII; Fricke, *ibid.*, 1899).

5. Cherchons encore les équations d'un groupe $\mathfrak{G}$ deux fois transitif de degré $p+1$ (p premier >2) et d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$. Le groupe G_2 fixant un symbole est d'ordre $\frac{1}{2}p(p-1)$, contient un seul diviseur d'ordre p et divise le groupe métacyclique; donc G_2 est semi-métacyclique. De plus G_2 ne contient aucun diviseur normal dans $\mathfrak{G}$. Donc $\mathfrak{G}$ contient $p+1$ diviseurs d'ordre p. *On va voir que, sauf si* $p=7$, $\mathfrak{G}$ *est nécessairement le groupe* $\mathfrak{V}_1(2,p)=\mathfrak{V}$, *formé des substitutions de* $\mathfrak{L}(2,p)$ *où* $\alpha\delta-\beta\gamma$ *est un carré. Si* $p=7$, $\mathfrak{G}$ *a une seconde forme possible.*

En posant $b=(z+1)$, $a=(i^2z)$, i étant racine primitive de p, G_2 est défini par

$$b^p = a^{\frac{p-1}{2}} = 1, \qquad a^{-1}ba = b^{i^2}$$

(d'où $a^{-x}b^ya^z = b^{yi^{2x}}$, équation dont l'usage sera constamment sous-entendu dans la suite). Les symboles étant ∞, 0, 1, i, ..., i^{p-1}, on a

$$b=(0,1,2,\ldots,p-1), \qquad a=(i^0,i^2,i^4,\ldots,i^{p-3})(i,i^3,\ldots,i^{p-2});$$

si $p=3$, $a=1$. Cherchons une substitution du second ordre $c=(0\infty)\ldots$ telle que $\mathfrak{G}=(G_2, c)$ soit deux fois transitif, G_2 étant le diviseur fixant ∞. Le groupe fixant 0, ∞ étant de classe $p-1$, c sera de degré $\geq p-1$. Si le degré de c est $p-1$, $\{a\}$, d'ordre $\frac{1}{2}(p-1)$ et de degré $p-1$, doit contenir une substitution d'ordre 2 conjuguée de c: donc $p\equiv 1 \pmod 4$. Si donc $p=3$, $c=0\infty.12=(-z^{-1})$, $\mathfrak{G}$ est défini par

$$b^3=c^2=(bc)^3=1$$

et contient normalement le groupe quadratique $\{c, b^{-1}cb\}$; donc $G=\mathfrak{v}$. Supposons désormais $p\geq 5$. Il faut $cac=a^\alpha$ et $c^2ac^3=a$; donc $\alpha^2=1$.

Soit d'abord $\alpha=1$. — Si c transforme en lui-même chaque cycle de a, on aura, c étant de degré >2,

$$c=(0,\infty)(i^{2x}, i^{2x+2\rho})(i^{2x+1}, i^{2x+2\sigma+1}), \qquad x=0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-3),$$

ρ et σ étant des entiers inconnus $<\frac{1}{2}(p-1)$. Le cycle $(i^{2x+2\rho}, i^{2x+4\rho})$ coïncidant avec $(i^{2x}, i^{2x+2\rho})$, on a $4\rho\equiv 0 \pmod{p-1}$, et, puisque $4\rho<2(p-1)$, $4\rho=p-1$. De même $4\sigma=p-1$ et $p\equiv 1 \pmod 4$, $c=(0,\infty)(z,-z)(z\not\equiv 0)=(0,\infty)a^{\frac{1}{4}(p-1)}$. Donc $\mathfrak{G}$ contiendrait $(0,\infty)$ et sa classe serait $<p-1$. Ainsi c échange les deux cycles de a, et l'on aura $c=(0,\infty)(i^{2x}, i^{2x+\rho})$, $x=0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(p-3)$, ρ *impair* $<\frac{1}{2}(p-1)$, ou $c=(0,\infty)\left(z, v^{\left(\frac{z}{p}\right)}z\right)(v=i^\rho, z\not\equiv 0)$, $\left(\frac{z}{p}\right)=z^{\frac{p-1}{2}}$ représentant $+1$ si z est carré, sinon -1 : c n'est évidemment pas dans $\mathfrak{v}(2,p)$. Il faut maintenant que $cb^\beta c$ soit, pour $\beta=1, \ldots, p-1$, de la forme $b^x a^y cb^{x'} a^{y'}$, ou, c étant permutable à $\{a\}$ et a à $\{b\}$, de la forme $b^x cb^{x'} a^y$, ou encore, en remplaçant $\{a\}$ par un de ses conjugués dans G_2, $cb^\beta c=b^x cb^{x'} b^{-t} a^y b^t$; et cela suffit. Faisons, en particulier $\beta=1$, $t=r$,

$$cbc=\left(\infty, r, \ldots, kr^{\left(\frac{k}{p}\right)}, (k+1)r^{\left(\frac{k+1}{p}\right)}, \ldots, -r^{\left(\frac{-1}{p}\right)}\right),$$

$b^{-t}a^y b^t$ fixera r et l'on devra avoir

$$x=r\left(\frac{-1}{p}\right), \qquad x'=r, \qquad cbc=b^{r\left(\frac{-1}{p}\right)}ca^y b^r.$$

Pour déterminer y, observons que $b^{r\left(\frac{-1}{p}\right)}$ change $kr^{\left(\frac{k}{p}\right)}$ $(k \neq -1)$ en $kr^{\left(\frac{k}{p}\right)} + r^{\left(\frac{-1}{p}\right)} = u(\neq 0)$, que $c = \left(u, r^{\left(\frac{u}{p}\right)}u\right)$, et que, finalement, on a

$$(1) \quad ur^{\left(\frac{u}{p}\right)}i^{2y} + r = (k+1)r^{\left(\frac{k+1}{p}\right)} \quad \text{si } k > 0, \quad = 0 \quad \text{si } k = 0.$$

De là, pour $k = 0$,

$$\rho\left[\left(\frac{-1}{p}\right) - 2\right] + 2y \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}.$$

Donc $\frac{p-1}{2}$ est impair comme ρ, $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ (donc $p \geqq 7$) et $2y = 3\rho + \frac{p-1}{2}$.

Cela posé, la suite S des termes $\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots, \left(\frac{p-1}{p}\right)$ présente (Jordan, *Traité*, p. 158) $\frac{p-1}{2}$ variations de signe exactement, c'est-à-dire $\frac{p-1}{2}$ termes suivis d'un terme de signe contraire et, en particulier, $\frac{1}{4}\left[p - \left(\frac{-1}{p}\right) - 4\right]$ $(\geqq 1$ pour $p \geqq 7)$ non carrés suivis d'un carré. Soit donc k non carré, $k+1$ carré. On aura $u = (k+1)r^{-1}$, (1) donnera

$$2k \equiv -1 \pmod{p}, \qquad k = \frac{p-1}{2},$$

et comme il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés, S présentera $3 = \frac{p-1}{2}$ variations de signe. Donc $p = 7$. On obtient ainsi un groupe $\mathcal{G}$ de degré 8 et d'ordre 168, $\not\equiv \mathfrak{v}(2, 7)$, défini, en prenant $i = 3$, $\rho = 1$, par

$$b^7 = a^3 = c^2 = 1, \qquad a^{-1}ba = b^2, \qquad cac = a, \qquad cbc = b^3cb^3$$

(les équations répondant à $\beta = 2, \ldots, 6$ résultent de celles-ci; *cf.* n° **1**), et engendré par

$$0123456 = b, \qquad 124 \,.\, 365 = a, \qquad 0\infty \,.\, 13 \,.\, 26 \,.\, 45 = c.$$

Il contient un diviseur normal D d'ordre 8 formé des $b^{-x}cb^{x}$ et de l'unité, et divise par conséquent le groupe linéaire total à trois variables dans $C(2)$; en désignant respectivement ∞, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 par les points 000, 100, 010, 001, 110, 011, 111, 101, on a

$$c = |x+1, y, z|, \qquad b = |z, x+z, y|, \qquad a = |x, z, y+z|.$$

Le diviseur normal $\{D, c\} = \{b, c\}$ est le groupe d'ordre $2^3(2^3-1)$ du n° 2. On a évidemment $\mathcal{G} = D\{a, b\}$, et D est le seul diviseur normal minimum possible dans un groupe primitif de degré 8. Le groupe fixant deux symboles $\{a\}$ a 28 conjugués et est, par suite, permutable aux seules substitutions du groupe Γ de générateur

$$ac = 164325 \,.\, 0\infty$$

composé des six substitutions permutant entre eux 0, ∞. Deux substitutions γ, γ' d'ordre $\neq 2$ de Γ ne peuvent être conjuguées dans $\mathcal{G}$, car si $s^{-1}\gamma s = \gamma'$, s doit permuter entre eux 0, ∞, donc être dans Γ. Donc chaque substitution d'ordre $\neq 2$ de Γ a 28 conjuguées. $\{b\}$ étant permutable aux seules substitutions de $\{a, b\}$, b n'a pas d'autre conjuguée dans $\{a, b\}$ par les opérations de $\mathcal{G}$ que par celles de $\{a, b\}$: donc pas d'autres que b, b^2, b^4. Ainsi dans $\mathcal{G}$ les opérations d'ordre 3, 6, 7 forment respectivement deux systèmes conjugués de 28, deux de 28, deux de 24. Les opérations d'ordre 2 forment un système de 7. $\{a\}$ et $\{b\}$ ne divisant normalement aucun diviseur normal, les facteurs de composition de $\mathcal{G}$ sont 3, 7, 2, 2, 2, 1 dans cet ordre unique.

Soit maintenant $\alpha = -1$. Si c transforme chaque cycle de a en lui-même, $c = (0, \infty)(i^{2x}, i^{2\rho-2x})(i^{2x+1}, i^{2\sigma-2x-1})$, $x = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(p-3)$, $\rho, \sigma < \frac{1}{2}(p-1)$, ou $c = (z, \zeta z^{-1})$, ζ étant égal à $i^{2\rho} = r$ ou à $i^{2\sigma} = s$ selon que z est carré ou non. Ici encore il faut et il suffit que $cb^{\delta}c = b^{x}cb^{x'}b^{-t}a^{\delta}b^{t}$. Or, si $p \equiv 1 \pmod 4$, c remplaçant -1 par $-r$, on aura

$$cbc = (\infty, r, \ldots, -r),$$

et, pour $t = r$,

$$b^{-t}a^{\delta}b^{t} = (r)(\ldots).$$

Donc, $x = x' = r$ et $cbc = b^r ca^y b^r$. Pour que le second membre fixe o, il faut $i^{2y} = -r$. Soit alors ν le premier non carré (mod p) dans la suite des entiers naturels;

$$cbc = \left(\infty, r, \frac{r}{2}, \ldots, \frac{r}{\nu - 1}, \frac{s}{\nu}, \ldots, -r\right),$$

$$b^r ca^y b^r = \left(\frac{r}{\nu - 1}, \frac{1-\nu}{r} s + r, \ldots\right).$$

Donc $s = r$, $c = (rz^{-1})$ et $\varsigma = \upsilon(2, p)$. Alors

$$cb^\beta c = \left(\infty, \frac{r}{\beta}, \frac{r}{2\beta}, \ldots, \frac{-r}{\beta}\right),$$

et pour $t = \frac{r}{\beta}$,

$$b^{-t} a^y b^t = \left(\frac{r}{\beta}\right)(\ldots), \qquad x = x' = \frac{r}{\beta}, \qquad cb^\beta c = b^{\frac{r}{\beta}} ca^y b^{\frac{t}{\beta}}.$$

Pour que le second membre fixe o, il faut $i^{2y} = \frac{-r}{\beta^2} c$, et l'on vérifie directement que cela suffit, quel que soit le carré $-r = \varkappa^2$; en profitant de l'indétermination de $\varkappa$ on pourra choisir y pour une des valeurs des β. Ainsi υ est défini par $b^p = a^{\frac{p-1}{2}} = c^2 = (ca)^2 = 1$, $a^{-1} ba = b^{i^2}$, $cb^\beta c = b^{-\frac{\varkappa^2}{\beta}} ca^y b^{-\frac{\varkappa^2}{\beta}}$, $\beta i^y = \varkappa$, $\varkappa$ étant quelconque ($\neq$ o) et indépendant de β. Il suffira de faire parcourir à β un système de restes tels qu'aucune équation ne résulte des autres (*cf.* **1**). En prenant $y = 1$ pour une valeur de β on pourra éliminer a par la dernière équation. Pour $\beta = \varkappa$, cette dernière équation se réduit à $(b^\varkappa c)^3 = 1$.

Pour $p = 5$, $i = 2$, $k = 1$, les équations

$$b^5 = a^2 = c^2 = (ca)^2 = (ab)^2 = (bc)^3, \qquad cb^2 c = b^2 cab^2$$

se réduisent à $b^5 = c^2 = (bc)^3 = 1$; il suffit de vérifier que, en posant $a = cb^3 cb^2 cb^3$, ces dernières équations entraînent

$$(cb^3 cb^2 cb^3)^2 = (b^3 cb^2 cb^3)^2 = (cb^3 cb^2 cb^3)^2 = 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned} cb^3cb^2cb^3 &= cb^2.bcb.bcb^3 = cb^2cb^3.cbc.b^3 = cb.bcb.b^2cb^2 \\ &= cbc.b^3cb^2cb^2 = b^3cb^3cb^2cb^2 = (b^3c)b^3cb^2.cbc(b^3c)^{-1} \\ &= (b^3c)b^3.cbc.b^3(b^3c)^{-1} = (b^3c)b^2cb^3(b^3c)^{-1} \end{aligned}$$

conjuguée de c, donc d'ordre 2.

$$b^3cb^3cb^3 = (b^3c)b^3.cbc.(b^3c)^{-1} = (b^3c)bcb^3(b^3c)^{-1}$$

conjuguée de c, enfin

$$\begin{aligned} cb^3cb^2cb^3 &= cb^3cb^2.cb^3c.c = cb^3cb^3cbc \\ &= (cbc)^{-1}.cb^3c.b^3cbc = (cbc)^{-1}bcb^3(cbc) \end{aligned}$$

conjuguée de c. Ainsi $\mathfrak{V}(2, 5)$ d'ordre 60 est engendré par

$$b = (z+1) = (0123\infty) \qquad c = (-z^{-1}) = (0\infty)(1\infty)$$

et défini par

$$b^5 = c^2 = (bc)^3 = 1.$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, $cbc = (\infty, r, \ldots, -s)$, et pour $t = r$ il faut $r = s$, $x' = r$, $cbc = b^r ca^x b^r$: le second membre devant fixer 0, il faut $i^{2x} = -1$, ce qui est impossible, $-s$ n'étant pas carré.

Si c échange les cycles de a,

$$c = (0, \infty)(i^{2x}, i^{2\rho+1-2x})(i^{2x+1}, i^{2\sigma+1-2x-1}) = (z, \xi z^{-1});$$

$\xi = i^{2\rho+1} = r$ si z est carré, $\xi = i^{2\sigma+1} = s$ si z est non carré. Or si $p \equiv 1 \pmod 4$, $cbc = (\infty, r, \ldots, -r)$, et pour $t = r$ il faut

$$x = x' = r, \qquad cbc = b^r ca^x b^r;$$

le second membre devant fixer 0, il faut $si^{2y} = -r^2$, ce qui est impossible, s étant non carré. Si $p \equiv 3 \pmod 4$, $cbc = (\infty, r, \ldots, -s)$, et, pour $t = r$, $b^{-r}a^x b^r = (r) \ldots$, $x = s$, $x' = r$, $cbc = b^r ca^x b^r$. Le second membre devant fixer 0, il faut $i^{2x} = -r$. Soit alors ν le pre-

mier non carré (mod p) dans la suite des entiers naturels;

$$cbc = \left(\varkappa,\ r,\ \frac{r}{2},\ \ldots,\ \frac{r}{\nu-1},\ \frac{s}{\nu},\ \ldots,\ -s\right),$$

$$b^r ca^\nu b^s = \left(\frac{r}{\nu-1},\ \frac{1-\nu}{\nu}r+s,\ \ldots\right).$$

Donc $c = (rz^{-1})$, le groupe est $\mathfrak{v}(2, p)$ et l'on a les mêmes équations que tout à l'heure.

Pour $p = 7$, $i = 3$, $\varkappa = 2$, les équations

$$(1)\quad b^7 = a^3 = c^2 = (ca)^2 = 1, \qquad a^{-1}ba = b^2, \qquad cb^3c = bcab$$

(la dernière s'écrivant $a = cb^6cb^3cb^6$) suffisent, car de la dernière résulte

$$cbc = b^3cb^6a^2 = b^3ca^2b^3$$

dont le carré donne

$$\begin{aligned} cb^2c &= b^3.ca^2.b^6ca^2b^3 = b^3a.cb^6c.a^2b^3 \\ &= b^3.ab^4.ac.b^4a^2.b^3 = b^5cb^5 \qquad \text{ou} \qquad (b^2c)^3 = 1, \end{aligned}$$

et le carré de $cb^3c = bcab$ donne

$$cb^6c = bc.ab^2.cab = b.cbc.b \qquad \text{ou} \qquad (bc)^4 = 1.$$

Inversement (1) résulte de $b^7 = c^2 = (b^2c)^3 = (bc)^4 = 1$. En effet, en posant

$$a = cb^6cb^3cb^6,$$

$ca = b^6c.b^3cb^6$ est conjuguée de $b^3.cb^5c = b^5cb^2$, donc de c, qui est d'ordre 2.

$$\begin{aligned} a^{-1}ba &= bcb^3.bcbcbcb.b^5cb^3cb^6 \\ &= bcb^3.cb^5c.b^3cb^6 = b.cb^5cb^5c.b^6 = b^2. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} a^2 &= cb^6cb^3.cb^6cb^6c.b^3cb^6 = cb^6cb^6.b^5cb^5.b^6cb^6 \\ &= cb^6cb^6c.b^2.cb^6cb^6 = bcb^4cbc = a^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathfrak{v}(2,7)$ est engendré par

$$b = (z+1) = 0123456, \qquad c = (3z^{-1}) = 0\infty . 13 . 25 . 46$$

et défini par

$$b^7 = c^2 = (b^2c)^2 = (bc)^4 = 1.$$

En posant $b = b'^4$, $b' = b^2$, on obtient les équations de M. Dyck (*M. A.*, t. XX, p. 41, 1882).

$\mathfrak{v}(3,2) \equiv \mathfrak{L}(3,2)$ *étant un* g^8_{168} *simple est isomorphe à* $\mathfrak{v}(2,7)$.

Pour $p = 11$, $i = 2$, $\varkappa = 4$, les équations

$$b^{11} = a^5 = c^2 = (ca)^2 = 1, \qquad a^{-1}ba = b^4, \qquad cbc = b^6ca^2b^6$$

suffisent, car le carré de la dernière donne $cb^2c = b^3cab^3$, et sa quatrième puissance $(cb^4)^2 = 1$.

Pour $p = 13$, $i = 2$, $\varkappa = 4$, les équations

$$b^{13} = a^6 = c^2 = (ca)^2 = 1, \qquad a^{-1}ba = b^4, \qquad cbc = b^{-3}ca^2b^{-3},$$
$$cb^2c = b^5cab^5$$

suffisent, car la dernière élevée au carré donne

$$cb^4c = b^5cab^{-3}cab^5 = b^4cb^4;$$

elle donne encore directement $cb^5c = b^2cb^8a^5$ dont le produit avec $cbc = b^{-3}ca^2b^{-3}$ est

$$cb^6c = b^2cb^8a^5b^{-3}ca^2b^{-3} = b^2acb^{-4}ca^2b^{-3} = b^6ca^3b^6.$$

4. Soient $s = s_1 \ldots s_r$, $s_i = (a_{i1} \ldots a_{ip})$ une substitution d'ordre premier p à r cycles, $\mathrm{H} = \{s\}$, $\mathrm{H}_i = \{s_i\}$. Cherchons le groupe Γ des substitutions permutables à H dans le symétrique de même champ. Γ contenant normalement H est imprimitif et contient normalement un groupe K ne permutant pas les systèmes d'imprimitivité. $\Gamma | \mathrm{K}$ est isomorphe au symétrique $\{(12), (12\ldots r)\}$ de champ $1, 2, \ldots, r$.

Posons

$$\Pi_1^p(a_{1i}a_{2i}) = \alpha, \qquad \Pi_1^p(a_{1i}a_{2i}\ldots a_{ri}) = \beta, \qquad \{\alpha, \beta\} = S.$$

α et β étant permutables à s, on aura $\Gamma = KS$. Soient k une substitution de K, k_i son effet sur $a_{i1}, \ldots, a_{ip}$, ρ une racine primitive de p et $k^{-1}sk = s^{\rho^x}$. On aura $k_i^{-1}s_ik_i = s_i^{\rho^x}$ et k_i est dans le métacyclique $\{s_i, t_i\}$ où $t_i^{-1}s_it_i = s_i^{\rho}$. Donc k sera de la forme $\Pi_i s_i^{\sigma_i}t^x$, $t = t_1 \ldots t_r$, et $K = \{s_1, \ldots, s_r, t\}$ d'ordre $p^r(p-1)$. K contient normalement $\{s_1, \ldots, s_r\} = K_0$ *et a la parité de* r. $k_i = s_i^{\sigma_i}t_i^x$ déplaçant $p-1$ symboles ou p, selon que $x \neq 0$ ou $x = 0$, K_0 contient toutes les s^{rp} de K. Il est clair que Γ *est résoluble si* $r \leq 1$. En remplaçant au besoin t_i par une de ses conjuguées, on peut supposer que t_i fixe a_{i1}; alors chaque substitution de S sera évidemment permutable à chaque substitution de $\{s, t\}$.

Cherchons le plus grand commun diviseur D de K avec un groupe $G > H$ de degré rp, mais de classe $c > (r-1)p$, ou du moins ne contenant pas de s_p de degré $< rp$. Dans une substitution $\Pi_1^r s_i^{\sigma_i}t^x$ de D, x ne peut s'annuler que si tous les σ_i sont $\neq 0$; et si D contient $u = \Pi_1^r s_i^{\sigma_i}$ et $u' = \Pi_1^r s_i^{\sigma'_i}$, donc $u^\alpha u'^{\alpha'}$, α et α' vérifiant $\alpha\sigma_1 \equiv -\alpha'\sigma'_1$ (mod p), on devra avoir $\alpha\sigma_i \equiv -\alpha'\sigma'_i$, quel que soit i, donc $\sigma'_i \equiv \lambda\sigma_i$, $u' = u^\lambda$. Donc le plus grand commun diviseur de D, K_0 est $\{u\} = D^0$ normal dans D. Si $D > D_0$, soient vt^x, $v't^{x'}$, ... ses substitutions, v, v', ... étant dans K_0, et l'un au moins des x, x', ... étant $p-1$. D contiendra $(vt^x)^\beta(v't^{x'})^{\beta'}\ldots = wt^{\beta x + \beta' x' + \ldots}$, w étant dans K_0, et l'on peut choisir β, β', ... tels que $\beta x + \beta' x' + \ldots$ soit le plus grand commun diviseur θ de x, x', ... Mais si D contient wt^θ et $w't^{m\theta}$, il contient $(wt^\theta)^m = w_m t^{m\theta}$ et $w'w_m^{-1} = u^\delta$; donc $w' = u^\delta w_m$ et $w't^{m\theta} = u^\delta(wt^\theta)^m$. Donc $D = \{u, wt^\theta\}$ est isomorphe à un diviseur du métacyclique. En changeant au besoin de notation, on peut supposer que $D \equiv \{s, t^\theta\}$ et que t_i fixe a_{i1}, en sorte que chaque substitution de S (formée avec les nouveaux symboles) soit permutable à chaque substitution de D. Soient $\theta > 0$, Δ le plus grand commun diviseur de G, Γ et $\gamma\varkappa$ une substitution de Δ, γ étant dans S et $\varkappa$ dans K. Pour que $(\gamma\varkappa)^{-1}s^y t^{\theta z}\gamma\varkappa$ soit dans D, quels que soient y et z, il faut et suffit que $\varkappa^{-1}t^{\theta z}\varkappa$ soit dans D, ou, puisque $\varkappa = \Pi_i s_i^{\alpha_i}t^x$, que $s_i^{-\sigma_i}t_i^\theta s_i^{\sigma_i} = s_i^\sigma t_i^{\theta\tau}$,

σ et τ étant indépendants de i. Or, en observant que $t_i^{\theta} s_i^{\sigma_i} t_i^{-\theta} = s_i^{\sigma_i \rho^{\theta}}$, la condition précédente donne $s_i^{\sigma_i(\rho^{\theta-1})} t_i^{\theta} = s_i^{\sigma} t_i^{\theta\tau}$, d'où $\sigma_i(\rho^{-\theta} - 1) = \sigma$, $\tau = 1$. Donc α est dans $\{s\}$ et $\Delta = D\Sigma$, Σ divisant S; Δ est le produit direct de D, Σ, et si $r = 2$, $\Delta \{s\}$ est abélien.

5. Je me bornerai à énoncer ici certains théorèmes dont j'aurai à faire usage.

Dans un groupe primitif G *de degré kp et d'ordre akp (p premier, $ak \not\equiv 0 \bmod p$), le plus petit multiple commun* M *des diviseurs d'ordre p (tous conjugués) est simple. Si $k > 1$, (M, 1) est composé.* Comme $G = MB$, B étant le groupe des substitutions permutables à un g_p, on a $G \mid M = B \mid D$, D étant le plus grand commun diviseur de B, M. *Si donc $k < 5$, G | M est résoluble. Si $k = 1$, G | M est cyclique. Tout diviseur normal $H > 1$ de G étant transitif, donc d'ordre $\equiv 0 \pmod p$, donc $\geqq M$, G | H sera cyclique* (Miller, *P. L. M. S.*, t. XXXI, 1899, p. 148).

Un $g^{p-\alpha}$ où $\alpha > 3$ ne peut être $\alpha + 1$ fois transitif sans contenir l'alterné. On peut dire encore qu'*un g^n primitif d'ordre $< \frac{1}{2}n!$ ne peut contenir une s_p^p que si $n = p$, $p + 1$, $p + 2$.* Plus généralement, *un g^n primitif d'ordre $< \frac{1}{2}n!$ ne peut contenir une s_p^{kp} ($k < 6$ et $< p$) que si $n \leqq kp + k + 1$. Un $g^{2p+\alpha}$ ($\alpha \geqq 3$) ne contenant pas l'alterné ne peut être $\alpha + 1$ fois transitif.* (Jordan, *S. M.*, t. I, 1873, p. 40-45. *Cf.* Miller, *B. S. Am.*, t. IV, 1898, p. 141).

6. Soient G un groupe transitif de degré $n = rp$ (p premier), de classe $c > (r - 1)p$, d'ordre $N = mp$ (m premier à p et $> n - p + 1$); $H = \{s\}$ un des g_p conjugués de G $[s = s_1 \ldots s_r,\ s_i = (a_{i1} \ldots a_{ip})]$; Δ le $g_{\delta p}$ des substitutions de G permutables à H; D le g_{dp} des substitutions de Δ qui ne permutent pas les systèmes d'intransitivité de H. On a vu que, si $d > 1$, Δ est le produit direct de D par un groupe Σ isomorphe à un diviseur du g^r symétrique. Les substitutions d'ordre multiple de p sont toutes dans les conjugués de Δ, et chacun de ces conjugués contient au moins $p - 1$ de ces substitutions, celles de H. Il y a donc au moins $\frac{N}{\delta p}(p - 1)$ substitutions d'ordre multiple de p (et, par suite,

de degré n). D'autre part, le nombre total des symboles déplacés par les substitutions de G est $N(n-1)$ et les x substitutions de degré $<n$ en déplacent

$$N(n-1)-n(N-x)=nx-N.$$

Or, c étant $>n-p$, $x-1$ de ces dernières sont de degré $\geqq n-p+1$. Donc

$$nx-N\geqq(n-p+1)(x-1) \qquad \text{et} \qquad x\geqq\frac{N-n+p-1}{p-1}>\frac{N}{p}$$

(d'après l'hypothèse faite sur m). Or, c étant $>(r-1)p$, les x substitutions de degré $<n$ auront toutes un ordre premier à p et feront partie des μm (μ entier) substitutions dont l'ordre divise m. Donc $\mu\geqq 2$ et il y a au plus $N-2\frac{N}{p}$ substitutions d'ordre multiple de p. Donc

$$N\frac{p-1}{\delta p}\leqq N-\frac{2N}{p},$$

d'où

$$\delta\geqq\frac{p-1}{p-2} \qquad \text{ou} \qquad \delta\geqq 2.$$

Si $r=1$ les hypothèses se vérifient d'elles-mêmes pour G non cyclique et l'on a ce théorème de Mathieu (*J. M.*, 2e série, t. VI, 1861, p. 310) *qu'un g^p non cyclique contient des substitutions $\neq 1$ permutables à ses g_p.*

On peut remplacer les hypothèses faites sur m et c par celle *qu'il n'y a pas de s_p à moins de r cycles et que la transitivité t est $\geqq 2$.* Pour le faire voir, j'établirai d'abord une formule générale. Considérons les $\binom{n}{k}$ combinaisons k à k des n symboles déplacés par un g^nG rangées dans un ordre arbitraire. Soit G_i^k le diviseur fixant les k symboles de la $i^{\text{ième}}$ combinaison. G_i^k peut coïncider avec G_j^k, donc aussi avec un $G_i^{k'}$, où $k'>k$; mais je regarderai ici chaque élément d'un G_i^k comme distinct de ceux des autres. Une substitution s fixant $k+\nu$ symboles déterminés et point d'autres figurera, si elle existe

dans G, dans $\binom{k+\nu}{k} = \binom{k+\nu}{\nu} G_i^k$. Donc, dans l'ensemble, $E_k = \Sigma_i G_i^k - \Sigma_i G_i^{k+1} + \ldots$, de nombre

$$e_k = \Sigma_i(G_i^k, 1) - \Sigma_i(G_i^{k+1}, 1) + \ldots = \Sigma_i(G_i^k, 1) - e_{k+1},$$

elle figurera $\binom{k+\nu}{k} - \binom{k+\nu}{\nu-1} + \binom{k+\nu}{\nu-1} - \ldots \pm 1 = \binom{k+\nu-1}{\nu}$ fois. Si s n'existe pas dans G, elle ne figurera pas non plus dans E_k et l'on aura, g_μ étant le nombre des éléments de G qui fixent μ symboles exactement,

$$e_k = \Sigma_0^{n-k} \binom{k+\nu-1}{\nu} g_{k+\nu} = \Sigma_k^n \binom{\mu-1}{\mu-k} g_\mu \geqq \binom{n-1}{n-k} \qquad (\text{car } g_n = 1).$$

Pour $k = 1$, e_1 est le nombre exact des substitutions de degré $< n$. Si G est t fois transitif,

$$(G_i^k, 1) = (G, 1) : n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad (k \leqq t)$$

et

$$e_1 = (G, 1) - \frac{1}{2!}(G, 1) + \ldots + \frac{(-1)^{t-1}}{t!}(G, 1) + (-1)^t e_{t+1}.$$

Cela posé, il y aura, dans le groupe particulier que nous considérons, $e_1 = \frac{1}{2}N + e_3$ $(e_3 > 1)$ substitutions de degré $< n$. Donc

$$N - \frac{N}{2} > N\,\frac{p-1}{2p} \qquad \text{ou} \qquad \delta > 2\,\frac{p-1}{p} \qquad \text{ou} \qquad \delta \geqq 2.$$

Si t est $\geqq 4$, $e_1 = \frac{5}{8}N + e_5$ $(e_5 > 1)$ et $\delta > 3 - \frac{p+8}{3p}$; donc $\delta \geqq 4$, si $p \geqq 5$. Pour $t \geqq 4$, $r = 3$, G pair, $(\Sigma, 1)$ doit être < 3, donc $d \geqq 2$. Pour $t \geqq 2$, $r = 2$, G pair, $(\Sigma, 1)$ doit être $= 1$, donc $d \geqq 2$ (et il en est de même pour $t = 1$ si $e > p$ avec $\frac{N}{p} > p + 1$).

7. Supposons maintenant $2p + 1 = q$ premier et soient G_1 un g^q

transitif d'ordre $< \frac{1}{2}(q!)$ et $> q(q-1)$, G d'ordre N, le g^{2p} fixant un des symboles. G contiendra des s_p; car les substitutions ($\neq 1$) de $\mathcal{G}$ permutables à ses g_q sont de degré $q-1=2p$ et d'ordre 2, p ou $2p$; or, si elles étaient d'ordre 2, elles seraient impaires et, dans le plus petit commun multiple des substitutions paires de $\mathcal{G}$, les g_q ne seraient permutables qu'à leurs propres substitutions. G ne contiendra pas de s_p^p, car il faudrait $p \geqq \frac{2}{3}q$, ce qui ne se peut. De plus N qui divise $(2p)!$ n'est pas divisible par p^2; car un g_{p^2} y serait abélien sans être cyclique; or, toute s_p est ici de la forme $s = s_1 s_2$ $[s_i = (a_{i1} \ldots a_{ip})$; $i = 1, 2]$, et dans les s_p permutables à s qui sont de la forme $s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$, il faut $\alpha_1 = \alpha_2$, sans quoi $s^{-\alpha_1} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$ serait une s_p^p. Soit d'abord $\mathcal{G}$ pair, donc $\delta = d$. Si G est intransitif, ses des constituants transitifs de degré p, A et B, étant premiers à G, on a $G \equiv A \equiv B$, et comme A contient des substitutions d'ordre premier à p permutables à ses g_p, d est $\geqq 2$. Si G est transitif, $\mathcal{G}$ deux fois transitif contient $e_1 = \frac{1}{2}qN + e_3 (e_3 > 1)$ substitutions de degré $\leqq 2p$ et $qN\frac{p-1}{dp}$ s_p^{2p}. Donc

$$\tfrac{1}{2}qN - e_1 \geqq qN\frac{p-1}{dp},$$

d'où

$$d > 2\frac{p-1}{p} \qquad \text{ou} \qquad d \geqq 2.$$

Si $\mathcal{G}$ est impair, on arrive à la même conclusion en considérant le plus petit commun multiple de ses substitutions paires. *Ainsi $\mathcal{G}$ contient des substitutions de degré $2(p-1) = q-3$ permutables à $\{s\}$* (énoncé par Mathieu, *J. M.*, 2e série, t. XVIII, 1873, p. 26).

Soit $\mathfrak{M}$ le plus petit commun multiple des g_q de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est pair, les substitutions d'ordre multiple de p permutables à un g_q seront toutes d'ordre p. Or, $(\mathcal{G}, \mathfrak{M})$ qui divise $p(\mathfrak{S})$ ne peut être égal à p, car $(\mathcal{G}, 1)$ n'étant pas divisible par p^2, $(\mathfrak{M}, 1)$ serait premier à p et chaque g_q de $\mathfrak{M}$ ne serait permutable qu'à ses substitutions. Donc $(\mathcal{G}, \mathfrak{M}) = 1$. Donc *si $\mathcal{G}$ est pair, $\mathcal{G} = \mathfrak{M}$ est simple.*

Ainsi $D = \{s, g\}$, g étant une s^{q-3} permutable à $\{s\}$. Pour former g on n'a à choisir qu'entre un nombre limité de formes distinctes; car, si t_i est la s_{p-1}^{p-1} permutable à $\{s_i\}$ qui fixe a_{i1} et si $t = t_1 t_2$, on a $D = \{s, s_2^\sigma t^\theta\}$, σ et θ étant indéterminés; $s_2^\sigma t_2^\theta$ est une conjuguée t_2^θ

de t_2 complètement déterminée par celui des a_{2k} qu'elle fixe, et si l'on pose $a_{2,\lambda+j} = a'_{2j}$ ($j = 1, \ldots, p$ et $\lambda + j$ étant pris mod p, ≥ 0, $\leq p - 1$), t_2 se déduit de t_1 en écrivant a'_{2j} pour a_{1j} : on aura toutes les $s_2^q t^\theta$ en faisant varier λ et θ.

Désignons les symboles de $\mathcal{G}$ par $0, 1, \ldots, q-1$ (mod q) : on pourra supposer que $\mathcal{G}$ contient $(z, z+1) = \alpha$ et que $s = (z, \iota^2 z)$ ι étant racine primitive de q. Écrivons $s = (\iota^{2x}, \iota^{2(x+1)})(\iota^{1+2x}, \iota^{1+2(x+1)})$; en faisant correspondre ι^{2x} dans le premier cycle et ι^{1+2x} dans le second au symbole x de la substitution $(x, x+1)$ (mod p) et en observant que la s_{p-1} conjuguée de $(x, \rho^\theta x)$ (ρ racine primitive de p) et permutable à $\{(x+1)\}$ qui fixe ξ est la transformée $(x, \rho^\theta(x-\xi)+\xi)$ de $(x, \rho^\theta x)$ par $(x+\xi)$, on voit que les diverses de g sont $(\iota^{2x}, \iota^{2x\rho^\theta})$ $(\iota^{1+2x}, \iota^{1+2(\rho^\theta x-\xi+\xi)})$ ($\xi = 0, \ldots, p-1$; $\theta = 1, p-2$).

Écrivons β pour s, γ pour g^2, γ_i pour les différentes formes de γ, et considérons les groupes

$$(\alpha, \beta, \gamma_i) = G_i^q = G_i.$$

G_i étant pair sera toujours simple. Tout $g_N^q\,\mathcal{G}$ où $N > q(q-1)$ et $< \frac{1}{2}(q!)$ contient un G_i, soit G_1, et le plus petit commun multiple $\mathfrak{M}$ des g_q de $\mathcal{G}$ est $\geq G_1$. Si $\mathfrak{M} > G_1$, $\mathcal{G}$ contient des s_q^q hors de G_1 et $(\mathcal{G}, G_1)$ est $\geq q$. Or, on ne peut avoir $(\mathcal{G}, G_1) = q$, car N serait multiple de q^2 et ne diviserait pas $q!$. *Donc* $(\mathcal{G}, G_1) \geq q+1$.

8. Pour $q = 5$, G_i n'existe pas, car il devrait contenir une s^{q-3}. *Donc, tout g^5 transitif divise le métacyclique ou contient l'alterné.*

Soient $q = 7$, $\iota = 3$,

$$\alpha = 0123456, \qquad \beta = 124.365,$$
$$\gamma_1 = 24.56, \qquad \gamma_2 = 24.35, \qquad \gamma_3 = 24.36.$$

Ici G_2 est l'alterné, car $\alpha^{-1}\gamma_2\alpha\gamma_2 = 246$, et G_3 est conjugué de G_1, car, en posant $\theta = 1326745$, on a $\theta^2 = \beta$, $\theta^{-1}\alpha\theta = \alpha^3$, $\theta^{-1}\gamma_3\theta = \gamma_1$. Écrivons γ pour γ_1, G pour G_1, et examinons $\{\alpha, \beta, \gamma\} = G$. On a $\alpha\gamma\alpha^{-1} = 13.45 = \delta$. Le g^6 F qui fixe 0 est donc transitif puisque $\{\beta, \delta\}$ l'est, et G est deux fois transitif. Formons encore $\beta^{-1}\delta\beta\delta = 45.26 = \varepsilon$.

Le diviseur E qui fixe 0, 1 n'est pas de degré effectif 5, car contenant le groupe quadratique $\{\gamma, \varepsilon\} = Q$ il serait transitif et diviserait le métacyclique : or les g_1 du $g^5_{1,5}$ sont cycliques. D'ailleurs E ne renferme ni s^4 cyclique (G est pair) ni s^3. Donc $E = Q$, F d'ordre 4.6 est $\{\beta, \gamma, \delta\}$, et $(G, 1) = 4.6.7 = 168$. Comme α, β, γ vérifient les équations

$$\alpha^7 = \beta^3 = \gamma^2 = (\gamma\beta)^2 = 1, \qquad \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^2, \qquad \gamma\alpha^3\gamma = \alpha\gamma\beta\alpha,$$

G est le groupe $\mathfrak{v}(2,7) \equiv \mathfrak{v}(3,2)$ dont on a déjà obtenu la représentation en g^8.

Cherchons à former un g^8 trois fois transitif où G soit le diviseur fixant 7. Il contiendra une transformée de γ de la forme $\zeta = 07.1x$, x étant inconnu. Comme $\zeta\beta\zeta$ doit être dans F (**1**), x ne peut être 2 ni 4, car $\zeta\beta\zeta\beta$ serait une s^3; x ne peut être 5 ni 6, car on aurait respectivement $\varepsilon\zeta\varepsilon = 07.14$, $\varepsilon\zeta\varepsilon = 07.12$. Mais $\zeta = 07.13$ donne

$$\zeta\beta\zeta = \delta\beta, \qquad \zeta\gamma\zeta = \gamma, \qquad \zeta\delta\zeta = \delta, \qquad \text{donc} \qquad \zeta F\zeta = F$$

et

$$\zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\delta\beta^2\alpha^3, \qquad \text{donc} \qquad \zeta\alpha F\zeta = \alpha\zeta\delta\beta^2\alpha^3 F.$$

Or αF renferme un système de restes de $G \pmod{\text{dd}\, F, 1}$, puisque, F étant transitif, αF renferme des substitutions changeant 0 en $1, \ldots, 6$, Donc on a bien $\zeta G\zeta \leqq G\zeta G$, et $\{\alpha, \beta, \gamma, \zeta\} = H$ est un $g^8_{1,3,1}$ trois fois transitif, défini par les équations de G jointes à

$$\zeta^2 = (\zeta\gamma)^2 = (\zeta\delta)^2 = 1, \qquad \zeta\beta\zeta = \delta\beta, \qquad \zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\delta\beta^2\alpha^3 \qquad (\delta = \alpha\gamma\alpha^{-1}).$$

On vérifie directement que les transformées respectives $\xi_k (k = 0, \ldots, 6)$ de $\xi = \zeta\beta^{-1}\delta\beta\delta = 07.13.26.45$ par α^k forment avec 1 un g_8 abélien $(\xi, \xi_1, \xi_2) = A$ normal dans H. On remarquera que A n'est qu'une fois transitif dans H trois fois transitif. Tout diviseur normal I de H coïncide avec A, car on a $H = IG$, et G simple est premier à I. Donc I est d'ordre 8. Donc $I = A$, sans quoi IA serait normal $> A$ et $H \mid I \equiv G$ ne serait pas simple; $\{\alpha, \beta, \xi\}$ et $\{\alpha, \xi\}$ sont respectivement le g^8_{168} composé et le $g^8_{7\,8}$ deux fois transitifs (**2**, **3**). Si l'on convient que 7 représente ∞ du $C(7)$, H contient $(z, -z^{-1}) = 0\infty.16.23.45 = \xi\beta^2\gamma$ et par suite aussi $\mathfrak{v}(2,7) = \{(z+1), (i^2 z), (-z^{-1})\}$.

Soit Γ un g^7 ne contenant pas l'alterné. $(\Gamma, 1)$ divise $\frac{7!}{2.3} = 4.5.6.7$. Si $(\Gamma, 1) > 7.6$, Γ est $\geqq G$. Or on a vu que, si $\Gamma > G$, $(\Gamma, 1) > 4.6.7.8$. *Donc* G *est l'unique g^7 ne contenant pas l'alterné et ne divisant pas le métacyclique.* Par suite, s'il y a un g^8 K trois fois transitif dans le champ 0, ..., 7 autre que H, le groupe M qui y fixe 7 sera le métacyclique qu'on peut supposer engendré par

$$\alpha = 0123456, \qquad \theta = 132645 \ (\theta^2 = \beta),$$

et s'obtiendra en adjoignant un générateur ζ permutable à $\{\theta\}$, transformé de $\theta^3 = 16.34.25$, de la forme $\zeta = (07)(6)\ldots$, θ^3 étant l'unique s_2 de $\{\theta\}$, on aura

$$\zeta\theta^3\zeta = \theta^3;$$

donc ζ fixe 1. On ne peut avoir $\zeta = 07.34.25$, car $\zeta\theta^3$ serait de degré 4 et K est de classe 6. Donc ζ a l'une des deux formes $07.23.45 = \zeta'$, $07.35.42$. $\zeta'\theta\zeta = 123654$ n'étant pas dans $\{\theta\}$, il faut que $\zeta = 07.35.42$. On a alors

$$\zeta\theta\zeta = \theta^5, \qquad \zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\theta^3\alpha;$$

or $\alpha\{\theta\}$ renferme un système de restes de M modd $\{\theta\}$, 1, puisque, $\{\theta\}$ étant transitif, $\alpha\{\theta\}$ contient des substitutions changeant 0 en 1, ..., 6. *Ainsi* K *existe et est unique : c'est donc le $g^8_{6.7\,8}$, trois fois transitif de Mathieu qui se trouve défini par* $\alpha^7 = \theta^6 = \zeta^2 = (\zeta\theta)^2 = 1$, $\theta^{-1}\alpha\theta = \alpha^3$, $\zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\theta^3\alpha$.

On a vu (**3**) qu'il y a deux g^8_{168}, et deux seulement, et que tout $g^8_{7\,8}$ deux fois transitif a un g^8_8 normal abélien, contenant 7 s_2 conjuguées. Soient α une des s_7 d'un $g^8_{7.8}$ deux fois transitif, $\zeta = 07.1x.yz.tu$ la s_2 à adjoindre à α pour engendrer le groupe. Pour chacune des déterminations 2, 3, 4, 5, 6 de x, y étant un quelconque des symboles restants, z a trois déterminations possibles; d'où 15 formes à essayer. Mais $\theta^{-1}\zeta\theta$ convient ou non en même temps que ζ, et l'on connaît déjà la solution $\zeta = \xi = 07.13.26.45$. La condition $\zeta\{\alpha\}\zeta = \{\alpha\}\zeta\{\alpha\}$ exclut les formes restantes. Il n'y a donc qu'un $g^8_{7\,8}$ deux fois transitif. Ce n'est d'ailleurs là qu'un cas particulier d'un théorème plus général (**2**). S'il y a encore un g^8 X deux fois transitif dans le champ

0, ..., 7, le diviseur M qui y fixe 7 sera un $g^7_{2.7}$ qu'on peut supposer être $\{\alpha, \theta^3\}$ $(\theta^3 = 16.25.34)$ et s'obtiendra en adjoignant une s_2 $\zeta = (07)$ ..., transformée de θ^3 permutable à θ^3, fixant par suite deux des symboles 1, ..., 6 qui seront dans un même cycle de θ^3. En considérant au besoin le groupe transformé par θ, on peut supposer que ζ fixe 1 et 6. On ne peut avoir $\zeta = 07.34.25$, car $\zeta\theta^3$ serait de degré 4 et X est de classe 6. Donc ζ a l'une des formes $07.32.45 = \zeta'$, $07.35.42$. Mais $\zeta'\alpha\zeta' = 7132546$ pour être dans $M\zeta'M$ devrait être de la forme $(60\ldots)\zeta'(01\ldots) = \alpha\zeta'\theta^{3k}\alpha$, et l'égalité $\zeta'\alpha^6\zeta'\alpha\zeta'\alpha^6 = \theta^{3k}$ est impossible. Il faudrait donc $\zeta = 07,35.42$. Mais $\zeta\alpha^2\zeta$ devrait être de la forme $\alpha^4\zeta\theta^{3k}\alpha^4$ et $\zeta\alpha^3\zeta\alpha^2\zeta\alpha^3 = \theta^5$. Donc X n'existe pas, et *les seuls g^8 de transitivité $\geqq 2$ sont un $g^8_{7.8}$, deux g^8_{168}, un g^8_{336}, un g^8_{1344}.*

9. Soit $q = 11$. On a, en écrivant a pour 10,

$$\alpha = 0123456789a, \qquad \iota = 2, \qquad \beta = 14593.28a76.$$

Si γ est d'ordre 2, γ a l'une des cinq formes

$$\gamma_1 = 43.59.86.a7, \qquad \gamma_2 = 43.59.a2.76, \qquad \gamma_3 = 45.59.78.62,$$
$$\gamma_4 = 43.59.6a.28, \qquad \gamma_5 = 43.59.27.8a.$$

Mais comme

$$[(\alpha^4\gamma_1)^6(\alpha^9\gamma_1)^6]^2 = 125, \quad (\alpha^3\gamma_3)^4 = 048, \quad [(\alpha\gamma_5)^6(\alpha^9\gamma_5)^6]^2 = 16a,$$

$G_1 = G_3 = G_5$ est l'alterné. Passons à γ_2, G_2 que j'appellerai respectivement γ, G. Les substitutions

$$\alpha^{-3}\gamma\alpha^3\alpha^{-6}\gamma\alpha^6 = 15.28.40.67 = \lambda, \qquad \alpha^2\gamma\alpha^{-2} = 081.237,45 = \mu$$

(qui montrent que G est deux fois transitif) engendrent un g^6 E où $\lambda\mu = 052.148.376 = \varkappa$ engendre un groupe normal, et où la troisième s_2 est $\varkappa^{-1}\lambda\varkappa = 42.01.85.36 = \nu$, les systèmes d'intransitivité étant 0, 1, 2, 4, 5, 8 et 3, 6, 7. Je dis que E est le groupe fixant a, 9.

En effet, en adjoignant $\zeta = \beta^{-1}\gamma\beta = 93.15.26.78$ et en posant $\zeta\varkappa = 05486.12397 = \theta$, on a

$$\theta^5 = \zeta^2 = (\zeta\theta)^3 = 1.$$

Donc $\{\zeta, \theta\} = F$ est partiellement homomorphe au g_{60}^{5} *simple*. Donc il lui est isomorphe. D'ailleurs F contient $\lambda = \theta^2\zeta\theta^3\zeta\theta^2$. Donc $F = \{\zeta, \lambda, \mu\}$ et F est l'*unique* g_{60}^{10} transitif.

Cherchons à adjoindre à F une substitution ρ telle que, dans $\{F, \rho\} = G'$, F soit le groupe fixant a. G' étant deux fois transitif, on peut supposer que $\rho = (9a)\ldots$ est conjugué de γ. On doit avoir $\rho E \rho = E$. Donc ρ permute entre eux les symboles de chaque système d'intransitivité de E et fixe un ou trois des symboles 3, 6, 7. Si ρ n'en fixait qu'un, ρ serait permutable à celle s des trois s_2 de E qui le fixe et fixerait deux symboles d'un des cycles de s en déplaçant quatre autres des symboles 0, 1, 2, 4, 5, 8 sans avoir dans le champ de ces symboles un cycle commun avec s (ρs serait alors une s^2) : dans ces conditions ρ ne serait pas permutable à $\{\varkappa\}$.

Soit donc $\rho = 3.6.7.a9\ldots$; ρ devant être permutable à $\varkappa$, λ, μ, ν a trois formes possibles

$$\rho_1 = a9.04.12.58, \qquad \rho_2 = a9.01.28.45, \qquad \rho_3 = a9.08.15.24.$$

Mais comme $(\rho_2\zeta)^4 = a39$, $\{F, \rho_2\}$ est alterné et ρ_2 ne convient pas ; si d'ailleurs on pose $52.48.36 = \tau$, on aura $\tau\rho_3\tau = \rho_1$ et $\tau\varkappa\tau = \varkappa^2$, $\tau\zeta\tau = \nu\zeta\varkappa^2$, donc $\tau F \tau = F$. Bornons-nous donc à faire $\rho = \rho_1$ et supprimons l'indice 1. On a

$$\rho\theta\rho = \theta\rho\mu\theta, \qquad \rho\theta^2\rho = \theta^3\rho\theta^3.$$

Or, $\theta E + \theta^2 E$ contenant des substitutions qui remplacent 9 par 0, ..., 8 renferme un système de restes de F (mod E, 1). Donc, *il existe un* g_{660}^{11} G' *deux fois transitif, et il est unique* comme le g_{60}^{10} transitif qui y fixe un symbole. Donc $G' = G\,[\alpha = \rho(\zeta\theta^3)^3\zeta\theta^2, \beta = \theta^3\zeta\theta^2\zeta\rho\theta, \gamma = \beta\zeta\beta^{-1}]$, et G est défini par les équations de F jointes à

$$\rho^2 = (\rho\lambda)^2 = (\rho\theta^2)^3 = 1, \qquad \rho\varkappa\rho = \varkappa, \qquad \rho\theta\rho = \theta\rho\mu\theta,$$

ou, puisque $\mu\theta = \zeta\theta^3\zeta\theta^2\zeta$, par

$$\theta^5 = \zeta^2 = (\zeta\theta)^3 = \rho^2 = (\rho\theta^2)^3 = (\rho\theta^2\zeta\theta^3\zeta\theta^2)^2 = 1,$$
$$\rho\zeta\theta\rho = \zeta\theta, \qquad \rho\theta\rho = \theta\rho\zeta\theta^3\zeta\theta^2\zeta.$$

G étant simple contient $12\, g_{11}$ et est représentable en g^{12} deux fois transitif (le diviseur fixant un symbole contient des s_{11}). G est donc isomorphe à *l'unique* g^{12}_{660} deux fois transitif $\upsilon(2, 11)$ dont on a trouvé les équations sous une autre forme au n° 5.

Considérons maintenant $\{\alpha, \beta, \gamma_4\} = G_4$. Les substitutions

$$\alpha^2\gamma_4\alpha^{-2} = 06.12.37.48 = \mu'$$

et

$$\alpha^{-6}\gamma_4\alpha^6.\beta^{-3}\alpha^{-4}\gamma_4\alpha^4\beta^3 = 074.125.368 = \varkappa'$$

montrent que G_4 est deux fois transitif. En posant $\tau = 13427568$ on a $\tau^{-1}\varkappa'\tau = \varkappa$, $\tau^{-1}\mu'\tau = \mu$; donc $\{\varkappa', \mu'\}$, qui fixe $9, a$, est d'ordre 6 et G_4 d'ordre $\geqq 660$. D'ailleurs

$$\tau^{-1}\alpha\tau = \rho\theta^3\mu\zeta\varkappa^2,$$
$$\tau^{-1}\beta\tau = \theta^3\mu\rho\lambda\theta^3\mu\zeta,$$
$$\tau^{-1}\gamma_4\tau = \theta^2\mu\varkappa^2\theta^3\mu\rho\theta^3\mu\varkappa\theta^3\mu.$$

Donc

$$\tau^{-1}G_4\tau = G.$$

Cherchons à adjoindre à G une substitution σ telle que, dans $\{G, \sigma\} = H$, G soit le groupe fixant b. H étant trois fois transitif, on peut supposer que $\sigma = (ab)\ldots$ est conjuguée de γ et l'on voit, comme pour ρ, que σ a l'une des trois formes

$$\sigma_1 = ab.04.12.58, \qquad \sigma_2 = ab.01.28.45, \qquad \sigma_3 = ab.08.15.24.$$

σ_1 est à rejeter, car $\sigma_1\rho = ab9$; σ_3 de même, car, en posant $\tau = 05.14.67$, on a $\tau\lambda\tau = \lambda$, $\tau\varkappa\tau = \varkappa^2$, $\tau\zeta\tau = \lambda\zeta$, donc $\tau F\tau = F$ et $\tau\sigma_3\tau = \sigma_1$. Soit donc $\sigma = \sigma_2$ et effaçons l'indice. On aura

$$\sigma^2 = (\sigma\rho)^3 = 1, \qquad \sigma\varkappa\sigma = \varkappa, \qquad \sigma\lambda\sigma = \lambda, \qquad \sigma\zeta\sigma = \lambda\zeta,$$

et ces équations jointes à celles de G définissent H. La substitution $\sigma' = (z, -z^{-1})$ (mod 11) qui s'écrit (en mettant b pour ∞, a pour 10) $ob.1a.25.37.48.69$ n'est pas dans H (contrairement à l'assertion

de MATHIEU, *J. M.*, 1873), car $\theta(\sigma\alpha^7\gamma\alpha^4\sigma'\alpha^7\gamma\alpha^4)^2 = 0426.1837$, qui fixe b, a, 9, n'est pas dans E.

Si γ est d'ordre 4, on a encore cinq formes $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}$, dont les carrés reproduisent respectivement $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$. Comme $\{\alpha, \beta, \gamma_i\}$ est $= \{\alpha, \beta, \gamma_i^2\}$, il suffit de considérer

$$\gamma_7 = 4539.a726, \qquad \gamma_9 = 4539.62a8.$$

Considérons d'abord $G_7 = \mathcal{G}$ en écrivant γ pour γ_7. On a

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = 03482.17965.a = \delta, \qquad \alpha^{-2}\gamma\alpha^2 = 6750.1948.a.2.3 = \varepsilon.$$

Donc le g^{10} fixant a est transitif et $\mathcal{G}$ l'est deux fois.

$$\gamma^{-2}\varepsilon\gamma^2 = 1538.0769.2.4.a = \eta, \qquad \eta\varepsilon\eta^2 = 0879.1645.a.2.3 = \theta.$$

Donc le g^9 fixant a, 3 et le g^8 fixant a, 2, 3 sont transitifs; et $\mathcal{G}$ est quatre fois transitif. $\{\varepsilon, \theta\}$ est un g_8^8 régulier (le groupe des quaternions) que l'on peut transformer par $\eta\delta^{-2}\varepsilon^2\delta^2 = \omega$ en un groupe $\mathfrak{G}$ de générateurs

$$\omega^{-1}\varepsilon\omega = 0567.1243 = \lambda, \qquad \omega^{-1}\theta\omega = 0263.1745 = \mu,$$

fixant a, 9, 8, défini par

$$\lambda^4 = \mu^4 = 1, \qquad \lambda^2 = \mu^2, \qquad \mu^{-1}\lambda\mu = \lambda^3.$$

S'il existe une s_2, $\zeta = (78)\ldots$ telle que, dans $\{\mathfrak{G}, \zeta\} = \mathcal{E}$, $\mathfrak{G}$ soit le diviseur fixant 8, on peut supposer ζ semblable à $\lambda^2 = 06.14.23.57$. Pour que $\zeta\lambda^2\zeta = (58)\ldots$ ait la forme $d'\zeta d$, d, d' étant dans $\mathfrak{G}$, il faut que $d = 57\ldots$, $d' = 75\ldots$, donc, $\mathfrak{G}$ étant régulier, que $d = d' = \lambda^2$, donc que $\zeta\lambda^2\zeta = \lambda^2\zeta\lambda^2$, ou $(\zeta\lambda^2)^3 = (\lambda^2\zeta)^3 = 1$. Donc $\zeta\lambda^2 = (785)\ldots$ et $\zeta = (78)(5)\ldots$ ζ et λ^2 n'ont aucun cycle commun, car $\zeta\lambda^2$ étant une s_3 de degré < 9 serait une s_3^6, donc de degré inférieur à la classe. Donc, si x, y, z, t désignent 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque et si $\zeta = 0x.6y\ldots$, x et y ne sont pas dans le même cycle de λ^2, car ζ et λ^2 auraient le cycle zt. On a donc à essayer

pour ζ les formes

$$\zeta_1 = 01.62.43.78, \qquad \zeta_2 = 01.63.42.78,$$
$$\zeta_3 = 02.61.43.78, \qquad \zeta_4 = 02.64.13.78,$$
$$\zeta_5 = 03.61.42.78, \qquad \zeta_6 = 03.64.12.78,$$
$$\zeta_7 = 04.62.13.78, \qquad \zeta_8 = 04.63.12.78.$$

On a $(\zeta_1\lambda^2)^3 = 1$, $\zeta_1\lambda\zeta_1 = \mu^3\zeta_1\lambda\mu$; donc on peut prendre ζ_1. $\zeta_2\lambda\zeta_2$ n'étant pas dans $\Theta\zeta_2\Theta$, ζ_2 est à rejeter. Or les substitutions 14.23, 14.06, 23.06 permutables à Θ transforment respectivement ζ_1 en ζ_8, ζ_4, ζ_5 et ζ_2 en ζ_7, ζ_6, ζ_3. Il suffit donc de considérer ζ_1 dont je supprimerai l'indice (ce choix a pour but d'obtenir finalement un groupe contenant α, β, γ). $\{\Theta, \zeta\} = \mathcal{E}$ est défini par les équations de Θ jointes à $\zeta\lambda\zeta = \mu^3\zeta\lambda\mu$ [d'où résulte $(\zeta\lambda^2)^3 = 1$], qui s'écrit $(\zeta\lambda)^2 = \mu^3\zeta\mu$. S'il existe une s_2, $\rho = (89)\ldots$ telle que, dans $\{\mathcal{E}, \rho\} = \mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ soit le diviseur fixant 9, on peut supposer, F étant trois fois transitif, ρ semblable à λ^2. $\zeta\rho$ devant être d'ordre 3, ρ fixe 7. $\zeta\rho$ devant être de degré 9 (la classe est 8), ρ n'a aucun cycle commun avec ζ. ρ devant être permutable à λ^2 fixe 5 et a un cycle commun avec λ^2, mais un seul sans quoi $\rho\lambda^2$ serait de degré inférieur à la classe. Donc ρ a l'une des trois formes

$$\rho_1 = 89.03.14.26, \qquad \rho_2 = 89.04.16.23, \qquad \rho_3 = 89.06.12.34.$$

Les substitutions 06.13.24, 01.23.46 permutables à Θ et à ζ transformant ρ_1 respectivement en ρ_2 et en ρ_3, on peut se borner à considérer ρ_3 et supprimer l'indice; les relations $\rho\lambda\rho = \lambda^3$, $\rho\mu\rho = \lambda\mu^3$ [ou $(\rho\lambda)^2 = 1$, $(\rho\mu)^2 = \lambda$], $(\zeta\rho)^3 = 1$ assurent d'ailleurs l'existence de $\mathcal{F}$ défini par ces équations jointes à celles de $\mathcal{E}$. S'il existe une s_2, $\sigma = (9a)\ldots$ telle que, dans $\{\mathcal{F}, \sigma\} = \mathcal{G}'$, $\mathcal{F}$ soit le diviseur fixant a, on peut supposer, $\mathcal{G}'$ étant quatre fois transitif, σ semblable à λ^2 et fixant 7, 8. $\lambda^2\sigma$ et $\zeta\sigma$ étant d'ordre 2 et $\rho\sigma$ d'ordre 3, σ fixe 5, a exactement un cycle commun avec λ^2 et ζ, mais aucun avec ρ, d'où, pour σ, les deux formes

$$\sigma_1 = 9a.02.14.36, \qquad \sigma_2 = 9a.01.23.46.$$

La substitution 06.13.24 permutable à $\mathfrak{D}$, ζ, ρ transformant σ_1 en σ_2, on peut se borner à considérer σ_1 et supprimer l'indice; les relations $\sigma\lambda\sigma = \lambda\mu$, $\sigma\mu\sigma = \mu^3$, $(\sigma\zeta)^2 = (\sigma\rho)^3 = 1$ assurent d'ailleurs l'existence de $\mathcal{G}$ défini par ces équations jointes à celles de $\mathfrak{F}$. $\mathcal{G}'$ contenant $\alpha = \sigma\rho\zeta\lambda$ contient forcément β (6); il contient aussi $\gamma = \alpha^{-1}\zeta\rho\mu\lambda^2\zeta\mu\lambda$. Donc $\mathcal{G}' \geqq \mathcal{G}$. D'ailleurs le diviseur de $\mathcal{G}'$ qui fixe a, 9, 8 est $\leqq$ au diviseur analogue de $\mathcal{G}$. Donc $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$. On vérifie aisément que, pour tout autre système de déterminations de ζ, ρ, σ, $\mathcal{G}'$ est $\neq \mathcal{G}$.

γ_9 n'est certainement pas dans $\mathcal{G}$ comme le dit Mathieu, car

$$\rho\zeta\lambda\mu\gamma_9\rho\sigma\lambda\zeta = 03415\text{-}76$$

devrait être dans $\mathfrak{D}$. Mais si l'on pose

$$(\gamma_9\alpha^3)^2 = \delta', \qquad \beta^{-1}\gamma_9\alpha^2\beta = \varepsilon' = 1084.2563,$$
$$\delta'^2(\gamma_9\alpha^6)^9 = \theta', \qquad \varepsilon'^{-1}\theta'\varepsilon' = \lambda' = 0425.1673,$$
$$(\theta'^2\delta'\lambda')^{-1}\delta'(\theta'^2\delta'\lambda')\varepsilon' = \mu' = 1072.3465,$$

on voit que $\{\alpha, \beta, \gamma_9\} = G_9$ est quatre fois transitif et que $\mathfrak{D}' = \{\lambda', \mu'\}$ est $\leqq$ au diviseur de G_9 qui fixe a, 9, 8. En posant encore

$$\zeta' = 87.03.25.46, \qquad \rho' = 98.06.23.45, \qquad \sigma' = a9.02.35.46,$$
$$\{\mathfrak{D}', \zeta', \rho', \sigma'\} = \mathcal{G}'', \qquad \omega = 104265,$$

$\mathcal{G}''$ contient $\gamma_9 = \mu'^3\zeta'\rho'\lambda'^2\zeta'\lambda'\sigma'\rho'$ et $\alpha = \sigma'\rho'\zeta'\mu'^3$, donc β, et l'on a

$$\mathcal{G}'' = G_9, \qquad \omega^{-1}\mathfrak{D}\omega = \mathfrak{D}',$$
$$\omega^{-1}\zeta\omega = \zeta', \qquad \omega^{-1}\rho\omega = \rho', \qquad \omega^{-1}\sigma\omega = \sigma',$$

c'est-à-dire que $\mathcal{G}''$ est semblable à $\mathcal{G}$.

S'il existe une s_2, $\tau = (ab)\ldots$ telle que, dans $\{\mathcal{G}, \tau\} = \mathfrak{K}$, $\mathcal{G}$ soit le diviseur fixant b, on peut supposer τ semblable à λ^2 et fixant 9, 8, 7. Comme $\tau\lambda^2$, $\tau\zeta$, $\tau\rho$ sont d'ordre 2 et $\tau\sigma$ d'ordre 3, τ a un cycle commun avec λ^2, ζ, ρ et aucun avec σ; d'où, pour τ, la forme unique

$$\tau = ab.06.13.24.$$

Les relations $\tau\lambda\tau = \lambda^3$, $\tau\mu\tau = \lambda\mu$, $(\tau\zeta)^2 = (\tau\rho)^2 = (\tau\sigma)^3 = 1$ assurent l'existence de $\mathfrak{H}$, qui est unique et défini par ces équations, jointes à celles de $\mathcal{G}$. Si l'on convient d'écrire b pour ∞, a pour 10, on aura

$$(z, -z^{-1}) (\mathrm{mod}\, 11) = 0b.1a.25.37.48.69 = \alpha^{-1}\tau\lambda\zeta\mu^3\rho\zeta\lambda\alpha;$$

donc $\mathfrak{H}$ contenant $(z+1)$, $(i^2 z)$, $(-z^{-1})$ contient $\mathfrak{V}(2, 11)$.

Soit Γ un g^{11} ne contenant pas l'alterné. $(\Gamma, 1)$ divisera

$$11! : 2.3.5.7 = 4.6.8.9.10.11$$

et aura la forme $11d(11k+1)$, d divisant 10 (*cf.* Cole, *Q. J.*, 1894, p. 45). Dans le g^{10} fixant un symbole, les s_5 ont deux cycles : donc les substitutions permutables à un g_5 dans ce g^{10} forment un groupe dont l'ordre 5δ divise 5.4 (4) et l'ordre du g^{10} a la forme $5\delta(5\alpha+1)$. Si Γ ne divise pas le métacyclique, il contiendra G ($\mathcal{G}$ contient G) et δ sera $\geqq 2$, donc $= 2$ ou 4. Les seuls ordres multiples de 660 remplissant ces conditions sont 110.72, 110.96. Si Γ est pair, $d = 5$ et 110.72 est seul admissible : mais alors $\delta = 4$ et l'on retombe sur $\mathcal{G}$. Donc, G et $\mathcal{G}$ sont les seuls g^{11} pairs d'ordre > 11.10 et $< \frac{1}{2}11!$ L'ordre d'un g^{11} impair non symétrique devrait donc être, s'il dépasse 110, $2(G, 1)$ ou $2(\mathcal{G}, 1)$: ces deux nombres étant $\neq 110.96$, *G et $\mathcal{G}$ sont les seuls g^{11} d'ordre > 11.10 et $< \frac{1}{2}11!$.*

On sait déjà que G et $\mathcal{G}$ étant pairs sont simples. Si $\mathfrak{H}$ avait un diviseur normal $A < \mathfrak{H}$, on aurait $\mathfrak{H} = \mathcal{G}A$; $\mathcal{G}$ simple devrait être premier à A; mais A, quatre fois transitif et normal, contenant, par suite, tous les g^{11} de $\mathfrak{H}$, contient ceux de $\mathcal{G}$ et ne peut être premier avec lui. *Donc $\mathfrak{H}$ est simple. $\mathfrak{H}$ est maximum dans le g^{12} alterné*, car si $\mathfrak{H}'$ était un $g^{12} > \mathfrak{H}$, le g^7 fixant cinq symboles dans $\mathfrak{H}'$ serait > 1 et la classe de $\mathfrak{H}'$, cinq fois transitif, serait $< 2.5 - 2$.

Dans $\mathfrak{H}$, une s_i ne peut être permutable à un g_{11} pour $i = 2, 3$, car on aurait un $g_{i.11}$ produit direct d'un g_i par un g_{11}, donc cycliques représenté en douze symboles, ce qui ne se peut. Cela exige qu'il y ait $2^2.3.5$ ou $2^6.3^3 = 1728$ g_{11}. Dans le premier cas, chacun est normal dans un $g_{2^2.11}$ qui devrait contenir 11 g_{2^2} dont deux auraient un plus grand commun diviseur d'ordre 2^3 normal dans un $g_{2^3.11}$ abélien con-

tenant un $g_{2.11}$ cyclique. *Il y a donc* 1728 g_{11}. De même une s_i ne peut être permutable à un g_5 pour $i = 3, 11$ et *cela exige qu'il y ait dans* $\mathfrak{K}$ $2\,3_7^6 g_5$. Donc, les g_5 étant de classe 10, chaque g_{720}^{10} qui fixe deux symboles en contient $2\,3_7^6 : \frac{12.11}{2} = 36$ dont le plus petit commun multiple *simple* est d'ordre $5.d.36$, d étant égal à 2 ou 4 (**6**). Si donc le g_{720}^{10} n'est pas simple, il contient un g_{360}^{10} simple. Or un g_{720} est toujours composé (*cf.* Burnside, *P. L. M. S.*, t. XXVI, p. 334) et tout g_{360} simple est isomorphe au g^6 alterné. Mais le g_{720}^{10} n'est pas isomorphe au g^6 symétrique, car il ne contient pas de s_6; en effet, une s_6 paire, de degré ≥ 8 et ≤ 10, contient ou 1 cycle de 6 symboles et 1 de 2, ou 2 cycles de 3 et 2 de 2; dans les deux cas son carré est de degré < 8. Une s_i ne peut être permutable à un g_{27} pour $i = 5, 11$; cela exige que le nombre des g_{27} soit 5.11, $2^2.5.11$, $2^3.5.11 = 880$ ou $2^6.5.11$. Or un des g_{27}, P, est engendré par

$$\zeta\lambda^2 = 034.126.578 \qquad = \varrho,$$
$$\zeta(\lambda\zeta)^2 = 086.135.247 \qquad = \chi,$$
$$\tau\sigma\zeta(\mu\zeta)^2 = 076.138.245.ab9 = \psi$$

et défini par $\varrho^3 = \chi^3 = \psi^3 = 1$, $\varrho\chi = \chi\varrho$, $\psi^{-1}\varrho\psi = \varrho$, $\psi^{-1}\chi\psi = \chi\varrho^2$. Le groupe $\{\varrho\}$ des opérations normales de P ne peut être normal dans un $g_{3.2^k}$ pour $k > 1$ (**4**). Donc les deux premiers membres sont à rejeter. Comme $\tau P \tau = P$, le dernier est inadmissible, car P ne serait permutable qu'à ses opérations. *Il y a donc, dans* $\mathfrak{K}$, 880 g_{27}. Tout g_{61} de $\mathfrak{K}$ est conjugué de $\{\varepsilon, \rho, \tau\} = Q$. Le groupe $\{\lambda^2, \rho\}$ des opérations normales de Q ayant pour systèmes d'intransitivité 1, 2, 3, 4; 0, 6; 5, 7; 8, 9; a, b ne peut être permutable à une s_3^{10}, ni à une s_{11}^{11}, ni à une s_3^9. *Il y a donc dans* $\mathfrak{K}$ $3^3.5.11 = 1485$ g_{61} (*cf.* Burnside, *Theory of groups*, p. 220).

10. Soit $q = 23$. On a $t = 5$, et, en écrivant respectivement pour

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,
ι, x, y, b, p, g, q, e, s, c, d, r, f, u, k, i, m, h, o, l, t, a, a,

$$\alpha = cxybpgqesdrfukimholtau,$$
$$\beta = xypsmconbqf.gdthrualiek.v.$$

γ est d'ordre 2, 5 ou 10, et, pour chacun de ces ordres, γ étant supposé fixer x est complètement déterminé par le symbole du second cycle de β qu'il fixe. Une fois l'ordre de γ choisi, j'écrirai γ_g, γ_d, ..., γ_k pour les déterminations de γ qui fixent g, d, ..., k respectivement. Ainsi, pour γ d'ordre 10, on a

$$\gamma_g = ypmbcfqnso.dtriukelha,$$
$$\gamma_d = ypmbcfqnso.thueagkirl,$$
$$\gamma_t = ypmbcfqnso.hrakldgeui,$$
$$\gamma_h = ypmbcfqnso.rulgitdkae,$$
$$\gamma_r = ypmbcfqnso.uaidehtglk,$$
$$\gamma_u = ypmbcfqnso.aletkrhdig,$$
$$\gamma_a = ypmbcfqnso.likhgurted,$$
$$\gamma_l = ypmbcfqnso.iegrdauhkt,$$
$$\gamma_i = ypmbcfqnso.ekdutlargh,$$
$$\gamma_e = ypmbcfqnso.kgtahiludr,$$
$$\gamma_k = ypmbcfqnso.gdhlreiatu.$$

Si γ est d'ordre 2, on vérifie directement que $(\alpha\gamma_g)^{52}$, $(\alpha\gamma_d)^{13}$, $(\alpha^4\gamma_t)^9$, $(\alpha\gamma_h)^{77}$, $(\alpha^2\gamma_r)^{33}$, $(\alpha^7\gamma_u)^3$, $(\alpha^3\gamma_a)^{12}$, $(\alpha^4\gamma_l)^{91}$, $(\alpha^3\gamma_i)^{12}$, $(\alpha\gamma_e)^{12}$, $(\alpha\gamma_k)^{17}$ sont des substitutions circulaires des degrés respectifs 3, 13, 13, 5, 5, 7, 11, 5, 5, 5, 5. Donc pour γ d'ordre 2, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ contient l'alterné. Il en est de même *a fortiori* si γ est d'ordre 10. Si γ est d'ordre 5. $(\alpha\gamma_d)^{16}$, $(\alpha\gamma_t)^{36}$, $(\alpha\gamma_h)^{19}$, $(\alpha\gamma_r)^9$, $(\alpha\gamma_u)^5$, $(\alpha^4\gamma_a)^{19}$, $(\alpha\gamma_l)^{17}$, $(\alpha^2\gamma_i)^{16}$, $(\alpha^3\gamma_e)^6$ sont des substitutions circulaires des degrés respectifs 3, 7, 3, 11, 11, 3, 5, 3, 13. Il reste donc seulement à essayer $\gamma = \gamma_g$, $\gamma = \gamma_k$.

Prenons d'abord $\gamma_k = ymcqs.pbfno.ghrit.dleau.x.v.k$. On a, en supprimant l'indice k,

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha = bhdec.gpnkl.qofma.rtsuv.y.x.i;$$

donc le diviseur de $\{\alpha, \beta, \gamma\} = G$ qui fixe x est transitif;

$$\alpha^{-1}\beta\gamma\alpha = afrqt.bpcdg.eknyh.iomus.v.x.l = \delta$$

montre que le diviseur fixant x, c est transitif, et

$$\delta^{-2}\gamma\delta^2 = esgao.dcqhu.pktmf.bluri.c.x.y = \varepsilon,$$
$$\gamma\delta\gamma^{-1} = ebhci.pomut.lkfsg.rnyaq.c.z.d = \varkappa,$$
$$\delta^{-1}\varkappa = aph.blk.coe.dig.fqu.rst.c.x.y.u.m = m_0$$

que le diviseur fixant c, x, y est transitif. *Donc* G *est quatre fois transitif.* Les substitutions

$$\varkappa^{-1}\delta\varepsilon^{-2}(\varkappa^2\gamma^2)^2\varepsilon^2\delta^{-1}\varkappa = a_1 = ab.cf.dg.eh.im.kn.lo.pq,$$
$$\varepsilon^{-2}(\varkappa^2\gamma^2)^2\varepsilon^2 a_1 = a_2 = ac.bf.di.ek.gm.hn.lp.oq,$$
$$\delta^{-1}\varkappa(\varepsilon^2\varkappa^2\gamma^2)\varkappa^2 = a_3 = ad.bg.ci.el.fm.ho.kp.nq,$$
$$(\delta^{-1}\varkappa)^2\varepsilon^2\varkappa^2\gamma^2 = a_4 = ae.bh.ck.dl.fn.go.ip.mq,$$
$$a_1 a_4\delta^{-1}\varkappa = a_0 = rst.bcf.del.hpm.ino.kqg$$

engendrent un g_{48}^{19} B où le diviseur normal $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est représenté régulièrement, a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q étant mis respectivement pour 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4, $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_3a_4$, $a_2a_3a_4$, $a_1a_2a_3a_4$, en sorte que l'on peut écrire (x_i, $\xi_i = 0, 1$)

$$a_1^{\xi_1}a_2^{\xi_2}a_3^{\xi_3}a_4^{\xi_4} = (a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4},\ a_1^{x_1+\xi_1}a_2^{x_2+\xi_2}a_3^{x_3+\xi_3}a_4^{x_4+\xi_4}),$$
$$a_0 = (a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4},\ a_1^{x_1}a_2^{x_2+x_1}a_3^{x_3}a_4^{x_3+x_4})(rst),$$

ou, plus brièvement, si l'on désigne $a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}$ par le point (x_1, x_2, x_3, x_4),

$$a_1^{\xi_1}a_2^{\xi_2}a_3^{\xi_3}a_4^{\xi_4} = (x_i, x_i + \xi_i),$$
$$a_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_2, x_1 + x_2, x_3, x_3 + x_4).$$

Les équations de B sont

$$a_0^3 = a_i^2 = 1, \qquad a_i a_k = a_k a_i (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$a_0^{-1}a_1a_0 = a_2, \quad a_0^{-1}a_2a_0 = a_1a_2, \quad a_0^{-1}a_3a_0 = a_4, \quad a_0^{-1}a_4a_0 = a_3a_4,$$

d'où résulte que *toute opération de* $Aa_0^{x_0}(x_0 = 1, 2)$ *est d'ordre* 3. On

observera aussi que $a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}$ fait partie d'un seul groupe quadratique normal dans B, engendré par $a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}$ et son transformé par a_0, $a_1^{x_2}a_2^{x_1+x_3}a_3^{x_4}a_4^{x_2+x_4}$. Deux groupes quadratiques Q_i, Q_k normaux dans B sont donc premiers entre eux et $Q_iQ_k = A$. Il y a dans A cinq diviseurs quadratiques normaux dans B,

$$Q_1 = \{a_1, a_2\}, \qquad Q_2 = \{a_3, a_4\},$$
$$Q_3 = \{a_1a_3, a_2a_4\}, \quad Q_4 = \{a_1a_4, a_2a_3a_4\}, \quad Q_5 = \{a_2a_3, a_1a_2a_4\}.$$

Les substitutions de A sont, avec l'unité,

$$\begin{aligned}
a_1 &= ab.\ ef.\ dg.\ ch.\ im.\ kn.\ lo.\ pq,\\
a_2 &= ac.\ bf.\ di.\ ek.\ gm.\ hn.\ lp.\ oq,\\
a_3 &= ad.\ bg.\ ci.\ el.\ fm.\ ho.\ kp.\ nq,\\
a_4 &= ae.\ bh.\ ck.\ dl.\ fn.\ go.\ ip.\ mq,\\
a_1a_2 &= af.\ be.\ dm.\ en.\ gi.\ hk.\ lq.\ op,\\
a_1a_3 &= ag.\ bd.\ cm.\ eo.\ fi.\ hl.\ kq.\ pn,\\
a_1a_4 &= ah.\ be.\ cn.\ do.\ fk.\ gl.\ iq.\ mp,\\
a_2a_3 &= ai.\ bm.\ cd.\ ep.\ fg.\ hq.\ kl.\ no,\\
a_2a_4 &= ak.\ bn.\ ce.\ dp.\ fh.\ gq.\ il.\ mo,\\
a_3a_4 &= al.\ bo.\ cp.\ de.\ fq.\ gh.\ ik.\ mn,\\
a_1a_2a_3 &= am.\ bi.\ cg.\ df.\ eq.\ hp.\ ko.\ ln,\\
a_1a_2a_4 &= an.\ bk.\ ch.\ dq.\ ef.\ gp.\ io.\ lm,\\
a_1a_3a_4 &= ao.\ bl.\ cq.\ dh.\ eg.\ fp.\ in.\ km,\\
a_2a_3a_4 &= ap.\ bq.\ cl.\ dk.\ ei.\ fo.\ gn.\ hm,\\
a_1a_2a_3a_4 &= aq.\ bp.\ co.\ dn.\ em.\ fl.\ gk.\ hi.
\end{aligned}$$

Les substitutions de Aa_0 sont

$$\begin{aligned}
a_0 &= rst.\ bcf.\ del.\ hpm.\ ino.\ kqg = a_0,\\
a_1a_0 &= rst.\ acb.\ dko.\ epg.\ hli.\ mnq = f_0,\\
a_2a_0 &= rst.\ afc.\ dnp.\ eqi.\ gho.\ klm = b_0,
\end{aligned}$$

$$a_3a_0 = rst.aed.\ bkm.cng.\ fhi.\ opq = l_0,$$
$$a_1a_0 = rst.ale.\ bpn.\ cqh.\ fok.\ gim = d_0,$$
$$a_1a_2a_0 = rst.abf.\ dhq.\ com.\ gnl.\ ikp = c_0,$$
$$a_1a_3a_0 = rst.akg.\ bei.\ chd.\ fnm.\ lpo = q_0,$$
$$a_1a_4a_0 = rst.aph.\ blk.\ coe.\ dig.\ fqn = m_0,$$
$$a_2a_3a_0 = rst.ani.\ bhg.\ cem.\ dfk.\ lqp = o_0,$$
$$a_2a_4a_0 = rst.aqk.\ boh.\ cln.\ dmi.\ efp = g_0,$$
$$a_3a_4a_0 = rst.adl.\ biq.\ cmo.\ fgp.\ hkn = e_0,$$
$$a_1a_2a_3a_0 = rst.ahm.bnd.\ cki.\ egf.\ loq = p_0,$$
$$a_1a_2a_4a_0 = rst.aon.\ bqe.\ cpk.\ dgm.\ flh = i_0,$$
$$a_1a_3a_4a_0 = rst.aio.\ bdp.\ cgl.\ ekh.\ fmq = n_0,$$
$$a_2a_3a_4a_0 = rst.amp.bgo.\ cdq.\ enk.\ fil = h_0,$$
$$a_1a_2a_3a_4a_0 = rst.agq.bml.\ cip.\ dof.\ ehn = k_0;$$

celles de Λa_0^2 sont leurs inverses.

Je dis que B est le diviseur de G qui fixe u, v, x, y. Pour le voir, cherchons à construire un groupe quatre fois transitif où B soit le diviseur fixant u, v, x, y. Soit C un $g_{20.48}^{20}$ transitif où B soit le diviseur fixant u. Le nombre λ des g_5 de C sera 1, 6, 16 ou 96. Or λ est $\neq 1$ et $\neq 16$, sans quoi un g_5 à quatre systèmes d'intransitivité serait permutable à une s_3^{15} (4) et la classe est 16. λ est $\neq 6$ sans quoi un g_5 serait normal dans un $g_{5.32}$ qui devrait contenir une s_2^{10} (le groupe Σ du n° 4 étant ici isomorphe à un g_8 du g^4 symétrique). Donc $\lambda = 96$. Le nombre μ des g_3 de C est 1, 10, 40 ou 160. Or $\{a_0\}$ n'étant permutable dans B qu'à ses substitutions, les substitutions permutables à $\{a_0\}$ dans C seront de la forme $(ua)j$, $(ua)j'$, ..., j, j', ... étant dans le champ de B. jj' étant donc permutable à $\{a_0\}$ dans le champ de B, on a $j' = j^{-1}a_0$ ou $j^{-1}a_0^2$. Il n'y a donc hors de $\{a_0\}$ que trois substitutions permutables à $\{a_0\}$. Le groupe des substitutions permutables à $\{a_0\}$ étant d'ordre 6, $\mu = 160$. Le nombre ν des g_{61} est 1, 3, 5 ou 15. Or ν est $\neq 1$, car il y a au moins 75 s_2^{16} dans les 5 conjugués de Λ (Λ est unique de son ordre dans chacun des 4 g^{19} fixant un des sym-

boles r, s, t, u). ν est $\neq 3$, car un g_{64} serait normal dans un $g_{5.64}$ qui devrait avoir un diviseur Δ normal dans C, tel que $C|\Delta$ soit représentable en g^3, ce qui ne se peut (Δ dont l'ordre diviserait $2^6.5$ devrait contenir les 96 g_5 de C). Enfin ν est $\neq 15$. En effet, 64 n'étant divisible par aucun des nombres 17, 18, 19, 20, tout g_{64} de C est intransitif et a un système d'intransitivité de 16 symboles (A est transitif). Le plus grand commun diviseur d'un g_{64} et de son constituant de degré 16 est un g^{16} contenu dans un g^{19}, donc conjugué de A. Soient P un g^{64} contenant (normalement) A et a_{0r}, a_{0s}, a_{0t} des conjuguées de a_0 dans les 3 g^{19} fixant r, s, t respectivement, lesquels contiennent normalement A. Si $\nu = 15$, P n'est permutable qu'à ses opérations et deux, w, w', des 9 substitutions $1, a_0^{\pm 1}, a_{0r}^{\pm 1}, a_{0s}^{\pm 1}, a_{0t}^{\pm 1}$ ne pouvant transformer P en un même conjugué (car $w^{-1}w' \neq 1$ serait permutable à P), on a 9 conjugués de P ayant le système d'intransitivité $a, b, \ldots, q$. Mais les g^{19} fixant un symbole de C se partagent en 5 systèmes de 4 groupes ayant pour plus grand commun diviseur un g_{16}^{16} dont le champ forme un système d'intransitivité commun à 9 g_{64}. Il y aurait donc 45 g_{64} et non 15. Donc $\nu = 5$. Un g_{64} devra contenir un diviseur normal Δ de degré $\geqq 8$, car, $C|\Delta$ étant représentable en g^5, $(C|\Delta, 1)$ doit diviser $5!$ D'ailleurs $(\Delta, 1)$ est > 8, sans quoi $C|\Delta$ serait isomorphe au g_{120}^5 symétrique, C aurait un diviseur normal X d'indice 2 et la relation $C = BX$ exigerait dans B un g_{24} normal qui devrait contenir les 32 s_3 de B. Enfin $(\Delta, 1)$ est < 32, sans quoi $C|\Delta$ serait représentable en g_{30}^5 et il n'y a pas de g_{30}^5 (un g_{30}^5 devrait contenir des s_3^3). Donc $(\Delta, 1) = 16$. Comme un g_{64} contenant A est $\geqq A\Delta$, A et Δ ont un plus grand commun diviseur Θ d'ordre $\geqq 4$ qui, étant aussi le plus grand commun diviseur de B, Δ, est normal dans B. D'ailleurs $(\Theta, 1)$ est < 8, sans quoi Δ ayant, avec les 5 conjugués de A, 5 plus grands communs diviseurs premiers entre eux deux à deux serait d'ordre > 35. Donc Θ est un des Q_i. Les plus grands communs diviseurs $\Theta = \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5$ de Δ avec les 5 conjugués de A dans C sont conjugués et premiers entre eux deux à deux; $\Delta = \Sigma\Theta_i$ ayant tous ses éléments d'ordre 2 est abélien. Δ normal dans C déplace tous les symboles et permute exclusivement entre eux les symboles fixés par chacun des conjugués de A et a, par suite, 5 ou 10 systèmes d'intransitivité qui sont des systèmes d'imprimitivité de C. D'ailleurs B, qui est le diviseur

fixant u, n'est pas maximum dans C, puisque $B\Delta$ d'ordre $16.48:4$ est $> B$ et $< C$. $B\Delta$, d'indice 5 dans C, y est maximum et la représentation du groupe simple $C|\Delta$ relative à $B\Delta|\Delta$ est semblable au g^5 alterné.

En transformant au besoin par l'inverse d'une substitution telle que

$$\mu_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 \\ x_2 & \alpha_2 x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \beta_2 x_3 + (\beta_1 + \beta_2) x_4 \\ x_3 & \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 & + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \\ x_4 & \alpha_4 x_1 + (\alpha_3 + \alpha_4) x_2 + \beta_3 x_3 + (\beta_3 + \beta_4) x_4 \end{vmatrix}$$

qui est permutable à A et à a_0, donc à B et qui transforme respectivement a_1, a_2, a_3, a_4 en $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4} = a'_1$, $a_1^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_4} a_4^{\alpha_3+\alpha_4} = a'_2$, $a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4} = a'_3$, $a_1^{\beta_3} a_2^{\beta_1+\beta_3} a_3^{\beta_4} a_4^{\beta_2+\beta_4} = a'_4$, donc Q_1, Q_2 en $Q_\alpha = \{a'_1, a'_2\}$, $Q_\beta = \{a'_3, a'_4\}$, on peut supposer que $\omega = Q_1$.

Les systèmes d'intransivité de Δ seront comme ceux de Q_1 de degré 4 et Δ en aura 5 : a, b, c, f; d, g, i, m; e, h, k, n; l, o, p, q; r, s, t, u. Dans Δ tout conjugué Q' de Q_1, autre que Q_1, contient trois substitutions des formes $rs.tu. \ldots$, $rt.su. \ldots$, $ru.st. \ldots$, qui s'obtiennent évidemment en transformant l'une d'elles par une s_3 de B qui permute exclusivement entre eux les symboles du système d'intransitivité fixé par Q'. Puisque $\Delta = Q_1 Q'$, *une seule substitution de* Δ *hors de* B *déterminera* Δ. Δ contient trois substitutions des formes $ru.st.ab.cf. \ldots$, $ru.st.ac.bf. \ldots$, $ru.st.af.bc. \ldots$, car il contient certainement l'une d'elles et ses produits par a_1, a_2, $a_1 a_2$. Considérons une substitution $\xi = ru.st.ab.cf. \ldots$. Supposons que ξ fixe l, o, p, q. Son effet sur d, g, i, m sera $di.mg$ ou $dm.ig$, sans quoi ξa_1 serait de degré < 16; son effet sur e, h, k, n sera respectivement $en.hk$ ou $eh.kn$, sans quoi ξa_2 ou $\xi a_1 a_2$ respectivement serait de degré < 16; mais dans le second cas $l_0^{-1} \xi l_0 \xi$ est de degré < 16. *Donc si* ξ *fixe* l, o, p, q, ξ *a la forme*

$$\xi_1 = ru.st.ab.cf.di.mg.en.hk.$$

Le diviseur Q'_1 conjugué de Q_1 dont ξ_1 fait partie est $\Sigma_j l_0^{-j} \xi_1 l_0^j = \{\xi_1, \eta_1\}$, en posant $\eta_1 = l_0^{-1} \xi l_0$, et Δ a la forme $\Delta_1 = Q_1 Q'_1$. Si ξ fixe e, h, k, n

ou d, g, i, m, on verrait de même, en se servant respectivement de e_0, d_0 au lieu de l_0, que ξ a respectivement les formes

$$\xi_2 = ru.st.ab.cf.dm.gi.lp.oq, \qquad \xi_3 = ru.st.ab.cf.ek.hn.lq.op,$$

et Δ les formes $\Delta_2 = Q_1 \Sigma_j e_0^{\,j} \xi_2 e_0^j$, $\Delta_3 = Q_1 \Sigma_j d_0^{-j} \xi_3 d_0^j$. Comme les substitutions $rst = \lambda$ et λ^2 permutables à chaque substitution de B transforment respectivement ξ_2 en $a_2\eta$ et ξ_3 en $a_1 a_2 \xi\eta$, donc Δ_2, Δ_3 en Δ_1, il suffit de considérer Δ_1 et j'écrirai Δ, ξ pour Δ_1, ξ_1.

Les substitutions de Δ sont

$$\begin{array}{ll}
ru.st.ab.cf.di.gm.en.hk = \xi, & ru.ts.dm.gi.ek.hn.lo.pq = a_1\xi, \\
rt.su.af.bc.dg.im.ek.nh = \eta, & rt.su.di.mg.eh.kn.lq.op = a_1 a_2 \eta, \\
rs.tu.ac.bf.dm.ig.eh.kn = \xi\eta, & rs.tu.dg.im.en.hk.lp.oq = a_2 \xi\eta. \\
ru.st.af.bc.eh.kn.lp.op = a_2\xi. & ru.ts.ac.bf.dg.im.lq.op = a_1 a_2 \xi, \\
rt.su.ac.bf.en.hk.lo.pq = a_1\eta, & rt.su.ab.cf.dm.gi.lp.oq = a_2\eta. \\
rs.tu.ab.cf.ek.hn.lq.op = a_1 a_2 \xi\eta, & rs.tu.af.bc.di.gm.lo.pq = a_1 \xi\eta.
\end{array}$$

et celles de $Q_1 = \{a_1, a_2\}$. Les seuls diviseurs de Δ qui fixent 4 symboles fixent les 4 symboles d'un système d'intransitivité. *Donc les 5 conjugués de* A *dans* C *fixent chacun les 4 symboles d'un système d'intransitivité de* Δ. BΔ étant maximum dans C, il suffit pour engendrer C d'adjoindre à BΔ une substitution étrangère à BΔ. Cherchons pour cela à former le conjugué A_1 de A qui a avec Δ le plus grand commun diviseur $\{\xi, \eta\}$ et qui par suite fixe l, o, p, q. A_1 contient une substitution $\zeta = (rb)\ldots$. Pour que $\xi\zeta\xi = \zeta$, il faut que $\zeta = ua.rb\ldots$. Pour que $\eta\zeta\eta = \zeta$, il faut que $\zeta = ua.rb.ct.fs.\ldots$; $\zeta\{a_0\}\zeta$ fixant u et a est dans B et dans $\{a_0\}$; comme $\zeta a_0 \zeta = bcf.\ldots$, $\zeta a_0 \zeta = a_0^2$, ce qui exige, ζ fixant l, o, p, q, que

$$\zeta = ua.rb.ct.fs.de.hm.in.gk.$$

A_1 contient de même $\zeta' = rd.ui.tg.sm.\ldots$, et puisque $\zeta\zeta' = \zeta'\zeta$,

$$\zeta' = rd.ui.tg.sm.an.be.ck.fh \qquad \text{et} \qquad A_1 = \{\xi, \eta, \zeta, \zeta'\}.$$

Comme B a deux systèmes d'intransitivité $a, b, \ldots, q$; r, s, t, et que $\xi = ur. \ldots$, $\zeta = ua. \ldots$, il faut et il suffit (1) pour l'existence de C que $B + B\xi B + B\zeta B$ forme un groupe qui sera C. Or les relations faciles à vérifier : $\xi^2 = 1$, $\xi a_1 \xi = a_1$, $\xi a_2 \xi = a_2$, $\xi a_3 \xi = a_1 a_2 a_3$, $\xi a_4 \xi = a_2 a_4$, $\xi a_0 \xi = a_0^2 \xi a_0^2$, donnent $\xi A \xi = A$, $\xi A a_0 \xi = A a_0^2 \xi a_0^2$. Donc $\xi B \xi$ est dans $B\xi B$, et l'on voit déjà que $B + B\xi B$ est le groupe $\{B, \xi\} = B\Delta$, où B est le diviseur fixant u, $B\Delta$ étant défini par les équations précédentes jointes à celles B. On remarquera que $\{A, \xi, \eta\}$ est un g^{64} d'équations

$$a_i^2 = \xi^2 = \eta^2 = 1, \qquad a_i a_k = a_k a_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad \xi\eta = \eta\xi,$$

$$(1) \quad \xi a_1 \xi = a_1, \qquad \xi a_2 \xi = a_2, \qquad \xi a_3 \xi = a_1 a_2 a_3, \qquad \xi a_4 \xi = a_2 a_4,$$

$$(2) \quad \eta a_1 \eta = a_1, \qquad \eta a_2 \eta = a_2, \qquad \eta a_3 \eta = a_2 a_3, \qquad \eta a_4 \eta = a_1 a_4.$$

$\mathfrak{B}$ est normal dans $B\Delta$, car on a ($l_0 = a_3 a_0 = a_0 a_4$) :

$$(3) \qquad a_0^{-1} \xi a_0 = a_1 \eta a_4, \qquad a_0^{-1} \eta a_0 = a_0 \xi a_0 a_1 a_3,$$

$$(4) \quad a_0^{-1} a_1 a_0 = a_2, \quad a_0^{-1} a_2 a_0 = a_1 a_2, \quad a_0^{-1} a_3 a_0 = a_4, \quad a_0^{-1} a_4 a_0 = a_3 a_4.$$

$B\Delta$ est évidemment aussi défini par les équations de $\mathfrak{B}$ jointes à (3), (4). Mais l'élimination de η fournit immédiatement le système déjà obtenu : la première équation (3) s'écrit $\eta = l_0^{-1} \xi l_0$; la seconde en résulte en vertu de (4), et de même (2) de (1).

On a en outre $\xi\zeta = a_1 \zeta a_1$ d'où $\xi = (a_1 \zeta)^2$, $\xi A \zeta = A \xi\zeta = A \zeta a_1$, et puisque $\zeta a_0 \zeta = a_0^2$, $\xi A a_0 \zeta = A \zeta a_1 a_0^2$, $\xi A a_0^2 \zeta = A \zeta a_1 a_0$. Donc $\xi B \zeta$ est dans $B\zeta B$. Enfin

$$\zeta a_0 \zeta = a_0^2, \qquad \zeta a_1 \zeta = a_1 \xi, \qquad \zeta a_2 \zeta = i_0 \xi i_0^2, \qquad \zeta a_3 \zeta = d_0 \zeta d_0^2,$$
$$\zeta a_4 \zeta = e_0^2 \zeta e_0, \qquad \zeta a_3 a_4 \zeta = a_3 a_4 \zeta a_3 a_4.$$

Donc $\zeta a_1 a_2 \zeta$ est dans $B\xi B$ et $\zeta a_1 a_3 \zeta$, $\zeta a_1 a_4 \zeta$, $\zeta a_2 a_3 \zeta$, $\zeta a_2 a_4 \zeta$, $\zeta a_i a_k \zeta$ $(i, k = 2, 3, 4)$, $\zeta a_2 a_3 a_4 \zeta$, $\zeta a_1 a_2 a_3 a_4 \zeta$ dans $B\zeta B$. On voit donc que C existe et est complètement déterminé par Δ. Comme $\xi = (a_1 \zeta)^2$, on a $C = \{B, \xi, \zeta\} = \{B, \zeta\}$. Les équations de C résultent de ce qui précède; mais elles peuvent se simplifier. On a

en effet $\zeta d_0 = rpnmc.sokib.tqhgf.uleda$. Donc ζ et d_0, vérifiant $\zeta^2 = d_0^3 = (\zeta d_0)^5 = 1$, engendrent un g_{60} simple I (3) premier au diviseur normal $\Delta = \{a_1, a_2, \zeta, \eta\}$. En mettant b_1, b_2, b_3, b_4, 0 pour a_1, a_2, ξ, η, d_0 respectivement, le g_{960}^{20} $C = \Delta 1$ est défini par

$$b_i^2 = \zeta^2 = 0^3 = (\zeta 0)^5 = 1, \qquad b_i b_k = b_k b_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$\zeta b_1 \zeta = b_1 b_3, \quad \zeta b_2 \zeta = b_2 b_3 b_4, \quad \zeta b_3 \zeta = b_3, \quad \zeta b_4 \zeta = b_4,$$
$$0^{-1} b_1 0 = b_2, \quad 0^{-1} b_2 0 = b_1 b_2, \quad 0^{-1} b_3 0 = b_4, \quad 0^{-1} b_4 0 = b_3 b_4.$$

Cherchons à former un g^{24} E deux fois transitif, où C soit le diviseur fixant c. S'il existe, il sera engendré par C et une s_2 $\rho = uv\ldots$ conjuguée de a_1 et déplaçant 14 des 19 lettres $a, \ldots, q, r, s, t$, donc fixant 2 des 16 lettres $a, \ldots, q$ au moins. On peut, en transformant ρ par une substitution de A, faire que l'une de ces 2 lettres soit a. Comme il faut que $\rho B \rho = B$, ρ permute entre elles les lettres r, s, t qui forment un système d'intransitivité de B et en fixe 1 ou 3. S'il en fixait 3, on aurait $\rho a_0 \rho = a$, puisque, ρ fixant a, $\rho_0 \{a_0\} \rho = \{a_0\}$; ρ fixant ensuite une des lettres $b, \ldots, q$ fixerait les 3 lettres du cycle de a_0 où elle figure et serait de degré $\leqq 15$. Donc ρ échange 2 des lettres r, s, t, et en transformant au besoin ρ par a_0 ou a_0^2 on peut supposer que $\rho = uv.rs\ldots$. Comme $\rho a_0 \rho = a_0^2$, *2 quelconques des 3 symboles b', c', d' que ρ fixe parmi $b, c, \ldots, q$ ne peuvent se trouver dans un même cycle de a_0*; ρ étant permutable aux 3 s_2 de A, $\beta' = ab'\ldots$, $\gamma' = ac'\ldots$, $\delta' = ad'\ldots$, on a $\delta' = \beta'\gamma'$, sans quoi ρ, permutable à $\beta'\gamma' = ac'\ldots$, fixerait c' et serait de degré $\leqq 15$ (b', c', d' n'étant pas dans un même cycle de a_0, $\{\beta', \gamma'\}$ n'est pas un des Q_i); *donc chacune des 3 lettres b', c', d' est déterminée par les 2 autres.* Il reste $\frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{9}{3} = 30$ manières de choisir b', c', d'. Or ρ transforme chacune des s_3, b'_0, c'_0, d'_0 de B qui fixent respectivement b', c', d', en son carré : donc c' et d' ne sont pas dans un même cycle de b'_0 et, si $b'_0 = c'e'f'.d'g'h'\ldots$, $\rho = e'f'.g'h'\ldots$. De même d', b' ne sont pas dans le même cycle de c'_0 et font connaître 2 *nouveaux* cycles de ρ (c' ne peut avoir 2 cycles formés des lettres b', c', f'; d', g', h', ni 2 cycles formés des lettres b', g', h'; d', e', f' : dans le premier cas, $b'_0 c'_0$ ou $b'_0 c'^2_0$ fixerait d', g', h'; dans le second, $b'_0 c'_0$ serait d'ordre > 4); b', c' et d'_0

font connaître les 2 derniers cycles de ρ. *Ainsi, chacun des* 30 *choix de* 2 *des lettres, b', c', d' détermine* ρ. Mais $\rho\zeta\rho = (ac)\ldots$ devant être dans $C\rho C$ sera de la forme

$$(ua\ldots)\rho(ua\ldots) = \zeta\rho\beta''\zeta,$$

β'' étant dans B. Donc $(\rho\zeta)^3$ sera dans B, et comme $\rho\zeta = (acu)\ldots$, $(\rho\zeta)^3$ fixera a, u et sera dans $\{a_0\}$. Si donc $(\rho\zeta)^3 \neq 1$, $\rho\zeta$ aura 2 cycles de 9 lettres. Or si ρ fixe b, $\rho = uc.rs.cf.a.b.t.\ldots$ et $\rho\zeta = (brftes)\ldots$. Donc ρ déplace b, et de même c et f. b, c ou f entrant dans 18 des 30 combinaisons b', c', d', il reste 12 déterminations de ρ à essayer. 4 seulement satisfont à la condition que $(\rho\zeta)^3$ soit dans B. Ce sont

$$\rho_1 = uc.rs.bg.eq.el.fk.in.pm.a.d.h.o.$$
$$\rho_2 = uc.rs.bi.eo.dl.fn.hp.kg.a.e.m.q,$$
$$\rho_3 = uc.rs.bm.ep.de.fh.gq.on.a.l.i.k,$$
$$\rho_4 = uc.rs.bd.el.ef.hm.io.kq.a.g.n.p.$$

Les groupes $\{C, \rho_i\} = E_i$ sont semblables, car la substitution

$$\rho' = rts.bef.hka.img.opq$$

permutable à Q_1, Q_2, a_0, ζ, donc à C transforme ρ_1 en $a_0\rho_2a_0^{-1}$, ρ_2 en $a_0\rho_3a_0^{-1}$, et $\rho'' = rts.bef.dig.enk.loq$ permutable à C, transforme ρ_1 en $a_0\rho_4a_0^{-1}$. Il suffit donc de considérer ρ_1 et j'écrirai ρ, E pour ρ_1, E_1. On a

$$\rho a_1\rho = a_1a_3, \qquad \rho a_2\rho = a_1a_2a_3a_4, \qquad \rho a_3\rho = a_3,$$

d'où

$$\rho a_4\rho = a_3a_4, \qquad \rho a_0\rho = a_0^2, \qquad \rho\zeta\rho = \zeta\rho\zeta, \qquad \rho\xi\rho = a_0^2\xi\rho a_0^2\xi a_0,$$

la dernière s'écrivant (puisque $\rho a_0^2 = a_0\rho$) $(\rho\xi a_0)^2 = 1$. Donc

$$\rho\zeta B\rho = \zeta\rho\zeta B, \qquad \rho\xi B\rho = a_0^2\xi\rho a_0^2\xi a_0.$$

Or $\zeta B + \xi B$ contenant des substitutions des formes $ua\ldots$, $ub\ldots$,

$uq\ldots$, $ur\ldots$, $us\ldots$, $ut\ldots$ contient un système de restes de C (mod d B, 1). Donc E répond à la question et est défini par les équations de C jointes à

$$\rho^2 = (\rho\zeta)^3 = (\rho a_3)^2 = (\rho a_0)^2 = (\rho\zeta a_0)^3 = 1,$$
$$(\rho a_1)^2 = a_3, \qquad (\rho a_2)^2 = a_1 a_3 a_4.$$

E *est simple*, car s'il avait un diviseur normal *minimum* $X > 1$, on aurait $E = XC$. Or X n'est pas premier à C, car il serait d'ordre 21 et contiendrait *un seul* g_7, lequel serait normal dans C.

Donc le plus grand commun diviseur de X, C est Δ et $(X, 1) = 16.21$. Mais alors X contiendrait 8 g_7 qui seraient tous ceux de E, et dans E un g_7 serait permutable à une s_5, ce qui est impossible, 5 ne divisant pas 7.6 (4) (*cf.* Miller, *S. M.*, t. XXVIII, 1900, p. 266).

Cherchons à adjoindre à E une s_2, $\sigma = a.u.xv\ldots$ telle que, dans $\{E, \sigma\} = F$, E soit le diviseur fixant x. On peut supposer que σ est de degré 16 et, comme pour ρ, qu'elle échange 2 des lettres r, s, t, fixe la troisième, et, par suite, aussi 3 des lettres $b, \ldots, q$. $\sigma^\zeta\sigma = (ua)\ldots$ devant être dans B, donc $(\sigma^\zeta)^2 = (u)(a)\ldots$ dans A, $(\sigma^\zeta)^2$ sera dans $\{a_0\}$. Si donc $(\sigma^\zeta)^2 \neq 1$, $\sigma^\zeta = (vx)(ua)\ldots$ sera de degré 22. σ fixant a et une seule des lettres r, s, t, on aura $\sigma a_0 \sigma = a_0^2$. Donc σ ne fixe pas 3 lettres d'un cycle de a_0. σ permutable à C, donc à Δ, permute entre eux les systèmes d'intransitivité de Δ et, fixant a, fixe le système a, b, c, f, donc une des lettres b, c, f. En transformant au besoin par a_0^{-1} on peut supposer que $\sigma = b.cf.\ldots$; donc $\sigma a_1 \sigma = a_1$, $\sigma a_2 \sigma = a_1 a_2$, σ fixant les systèmes a, b, c, f; r, s, t, u, et étant d'ordre 2 fixera au moins un des 3 systèmes restants. Supposons que σ fixe le système l, o, p, q. Elle ne fixera pas les 4 lettres, car elle serait de degré < 16; elle ne les déplacera pas toutes, car elle contiendrait un des couples de cycles $lo.pq$, $lp.oq$, $lq.op$ et serait permutable à a_2. Donc σ, permutable à a_1, fixe l et o ou p et q. Si σ fixe l et o, elle est permutable à $\{a_0\}$, $\{b_0\}$, $\{l_0\}$, $\{o_0\}$, et $\sigma = vx.cf.de.gh.in.km.pq.\ldots$, le dernier cycle étant rs, st ou tr. Mais σ^ζ fixant d, e, i, n, il faut que $(\sigma^\zeta)^2 = 1$, ce qui exige que le dernier cycle soit st. On a ainsi pour σ la détermination $\sigma_1 = vx.cf.de.gh.in.km.pq.st$. Si σ fixe p et q, on obtient de même la forme $\sigma_1' = vx.cf.du.ei\ gk.hm.lo.st$. Si σ fixe le système e, h, k, n, elle fixera e et h ou k et n, et l'on obtient les

2 formes [ici $(\sigma_\zeta^\vee)^2 = a_0$]

$$\sigma_2 = cx.cf.dl.go.iq.kn.mp.rt,$$
$$\sigma_2' = cx.cf.dp.eh.gq.io.lm.rt.$$

Si σ fixe le système d, i, m, g, elle fixe i et m ou d et g, et l'on a les 2 formes [ici $(\sigma_\zeta^\vee)^2 = a_0^2$]

$$\sigma_3 = cx.cf.dg.eq.hp.kl.no.rs,$$
$$\sigma_3' = cx.cf.el.ho.im.kq.np.rs.$$

Mais, $(\sigma_1'\rho)^3$, $(\sigma_2'\rho)^3$, $(\sigma_3'\rho)^3$ n'étant pas dans B, σ_1', σ_2', σ_3' sont à rejeter. D'ailleurs, les substitutions

$$(cx)\sigma_1' = \sigma_1'', \qquad (cx)\sigma_2' = \sigma_2'', \qquad (cx)\sigma_3' = \sigma_3''$$

donnent

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} (\sigma_1''\rho)^2 = a_0^2, & (\sigma_2''\rho)^2 = a_0, & (\sigma_3''\rho)^2 = 1, \\ (\sigma_1''\zeta^\vee)^2 = 1, & (\sigma_2''\zeta^\vee)^2 = a_0, & (\sigma_3''\zeta^\vee)^2 = a_0^2, \\ \multicolumn{3}{c}{(\sigma_i'' a_0 \sigma_i'' = a_0^2), \qquad \sigma_i'' A \sigma_i'' = A;} \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \sigma_i''\sigma_i\sigma_i'' = \sigma_i, \qquad \sigma_i''\sigma_k\sigma_i'' = \sigma_2 \qquad (i \neq k,\ k \neq l,\ l \neq i).$$

Donc les 3 groupes $\{E, \sigma_i\}$ sont semblables, et il suffit de considérer $\{E, \sigma\} = F$ en écrivant σ pour σ_1. Les relations

$$\sigma^2 = (\sigma\rho)^3 = (\sigma\zeta^\vee)^2 = (\sigma a_0)^2 = (\sigma a_1)^2 = 1,$$
$$\sigma a_2 \sigma = a_1 a_2, \qquad \sigma a_3 \sigma = a_1$$

démontrent l'existence de F. Jointes aux équations de E elles déterminent F.

F, *trois fois transitif, est simple*, car s'il y avait un diviseur normal $X < F$, on aurait $F = XE$, et puisque E est simple, X, premier à E, serait un g_{22}^{22} deux fois transitif, ce qui ne se peut.

Cherchons à adjoindre à F une s^2, $\tau = v.u.a.yx\ldots$ telle que, dans $\{F, \tau\} = G'$, F soit le diviseur fixant y. On peut supposer que τ est de degré 16, échange 2 des lettres r, s, t, fixe la troisième et par suite

aussi 3 des lettres $b, \ldots, q$. $(\tau\rho)^2$ et $(\tau\sigma)^3$ devant être dans B, τ ne peut avoir, d'après (1), qu'une des formes $\sigma''_i(xy)$, d'après (2) que l'une des formes

$$\tau_1 = \sigma''_2(xy) = xy.cf.dp.eh.gq.io.lm.rt,$$
$$\tau_2 = \sigma''_3(xy) = xy.cf.el.ho.im.kq.np.rs.$$

Comme $\sigma''_1\tau_1\sigma''_1 = \tau_2$, les 2 groupes $G_i = \{F, \tau_i\}$ sont semblables, on peut se borner à considérer τ_1 et j'écrirai τ pour τ_1. Les relations

$$\tau^2 = (\tau\sigma)^3 = (\tau a_0)^2 = (\tau a_1)^2 = 1, \qquad (\tau\rho)^2 = a_0,$$
$$(\tau\zeta)^2 = a_0, \qquad \tau a_2\tau = a_1 a_2, \qquad \tau a_3\tau = a_2 a_3 a_1$$

(d'où résulte $\tau a_1\tau = a_1 a_1$) démontrent l'existence de G_1 : jointes aux équations de F elles définissent G_1. G_1 contient $\alpha = \tau\sigma\rho\zeta a_1$, donc β, et $\gamma = \zeta a_1\zeta\rho\zeta e_0$. Donc $G_1 \geqq G$. Mais G où le diviseur fixant y, x, c est $\geqq B$ est lui-même $\geqq G_1$. Donc $G_1 = G$. On sait déjà que G est simple puisqu'il est pair : on peut, d'ailleurs, démontrer sa simplicité comme celle de F.

Cherchons encore à adjoindre à G une s_2, $\upsilon = yz.x.c.u.a. \ldots$, telle que, dans $\{G, \upsilon\} = H$, G soit le diviseur fixant z. υ aura forcément unes des formes $\sigma''_i(yz)$. La condition que $(\upsilon\tau)^3$ et $(\upsilon\sigma)^2$ soient dans B exclut $\sigma''_2(yz)$ et $\sigma''_3(yz)$. Donc

$$\upsilon = \sigma''_1(yz) = yz.cf.dn.ei.gk.hm.lo.st.$$

Les relations

$$\upsilon^2 = (\upsilon\tau)^3 = (\upsilon\sigma)^2 = (\upsilon\zeta)^2 = (\upsilon a_1)^2 = 1,$$
$$(\upsilon\rho)^2 = a_0^2, \qquad \upsilon a_2\upsilon = a_1 a_2, \qquad \upsilon a_3\upsilon = a_1$$

prouvent l'existence de H. H *est simple* : on le démontre comme pour F. Si l'on convient de représenter ∞ par z, la substitution

$$(Z, -Z^{-1}) \qquad (\mathrm{mod}\, 23)$$

sera

$$cz.xu.yr.bi.ph.gc.ql.en.st.dm.fa.ok = f_0\eta\sigma\xi\sigma\rho\eta\tau\sigma\rho\xi\eta\sigma\tau\upsilon\tau\sigma,$$

et H contenant α, β, $(Z, -Z^{-1})$ contiendra $\mathfrak{O}(2, 23)$.

Prenons maintenant

$$\gamma_g = ymcqs.phfno.druch.tikla.x.y.g.$$

et considérons $G_g = \{\alpha, \beta, \gamma_g\}$. Comme

$$\alpha = cxybpgqescdrfnkimholtau,$$
$$\beta = xypsmconbqf.gdthrualick.c,$$

la substitution $\delta_g = \alpha^{-1}\gamma_g\alpha = bhdec.gpnkl.rfcso.amitu.x.y.q$ montre que le diviseur de G_g fixant x est transitif et

$$\varepsilon_g = \gamma_g^2\,\delta_g\,\gamma_g^2 = nruds.gfpat.covmb.iqlkh.x.y.c$$

que celui fixant x, y est transitif. En posant

$$\theta_g = \delta_g\varepsilon_g^2, \qquad \mu_g = \alpha\varepsilon_g\alpha^{-1}\gamma_g^2, \qquad \nu_g = \mu_g\delta_g\theta_g\mu_g\theta_g,$$

les substitutions

$$\varphi = \nu_g^{-2}\,\delta_g\,\nu_g^2 \qquad = kpfli.cgnra.useth.qdhmo.c.x.y,$$
$$\psi = \nu_g^{-1}\,\theta_g^{-1}\delta_g\theta_g\nu_g = drpqg.bcome.snaki.thtfu.c.x.y$$

montrent que le diviseur de G_g fixant x, y, c est transitif. Donc G_g est quatre fois transitif. G_g contenant

$$\varphi\theta_g = b_{g0}, \qquad \theta_g\varphi = s_{g0}, \qquad \psi\mu_g = f_{g0}, \qquad \varphi^3\psi^2 = r_{g0},$$
$$s_{g0}r_{g0} = ae.bh.ct.di.fr.gk.lq.os = a_{g1},$$
$$r_{g0}s_{g0} = al.bk.ci.dt.eq.fs.gh.or = a_{g2},$$
$$s_{g0}b_{g0} = ao.bt.ch.dk.es.fq.gi.lr = a_{g3},$$
$$b_{g0}s_{g0} = ah.be.co.df.gl.ir.kq.st = a_{g4},$$

le diviseur de G_g qui fixe x, y, c, u contient $B_g = \{a_{g1}, a_{g2}, a_{g3}, a_{g4}, b_{g0}\}$. Or la substitution

$$\lambda = \begin{pmatrix} m & p & n & a & b & c & d & e & f & g & h & i & k & l & o & q & r & s & t \\ s & r & t & h & a & g & i & c & p & f & b & m & e & n & o & k & q & l & d \end{pmatrix}$$

transforme a_{g1}, a_{g2}, a_{g3}, a_{g4}, b_{g0}, $a_{g2}\theta_g\psi_g a_{g2}$ en a_1, a_2, a_3, a_4, a_0, $a_0^{-1}\zeta a_0$ respectivement. Donc $\chi^{-1}G_g\chi$ contient C; $\chi^{-1}G_g\chi$ contenant $a_0^{-1}\rho_4 a_0 = \chi^{-1}\theta_g^{-1}\delta_g^{-1}\theta_g a_2 a_3\xi$, $\rho''\chi^{-1}G_g\chi\rho''^{-1}$ contiendra ρ et E; $\rho''\chi^{-1}G_g\chi\rho''^{-1}$ contenant $\sigma_3 = (\chi\rho')^{-1}\beta^{-1}\alpha\chi\rho'(\zeta k_0\rho)^1$, $\sigma_2''\rho''\chi^{-1}G_g\chi\rho''^{-1}\sigma_2''$ contiendra σ et F; $\sigma_2''\rho''\chi^{-1}G_g\chi\rho''^{-1}\sigma_2''$ contenant

$$\tau_2 = \sigma\eta\xi a_1 a_2 a_3 a_4\zeta a_3 a_4\rho\eta\xi\sigma,$$

le transformé $\iota^{-1}G_g\iota$ de G_g par $\iota = \chi\rho''^{-1}\sigma_2''\sigma_1''$ contiendra τ et G. Comme d'ailleurs $\iota^{-1}\alpha\iota = \tau\sigma\rho b_0^2\xi$, $\iota^{-1}\gamma_g\iota = \alpha a_2 a_4 a_1\zeta a_1 a_2 a_4\xi\rho\zeta a_2 a_4 a_1\alpha^{-1}$, G contient $\iota^{-1}\alpha\iota$; donc $\iota^{-1}\beta\iota$ et $\iota^{-1}\gamma_g\iota$. Donc $G = \iota^{-1}G_g\iota$.

Tout g^{23} transitif ne contenant pas l'alterné et ne divisant pas le métacyclique est semblable à G. En effet, un tel groupe X contient un groupe semblable à G et est quatre fois transitif, mais non cinq fois car $23 = 19 + 4$ (5). Donc le g^{19} Γ fixant quatre symboles est intransitif et ne contient ni s_{13}, ni s_{17}, ni s_{19}. Donc $(X, 1)$ divisant $\frac{23!}{2.3.5.7.11.13.17.19}$, $(\Gamma, 1) = 48\omega$, ω divisant $4.9.10.12.14.15.16.18$; $\Gamma \geqq B$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que B. Soient $\mathfrak{A}$ son constituant de degré 16, $\mathfrak{B}$ celui de degré 3, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ leurs plus grands communs diviseurs avec Γ. On a $\mathfrak{B}_0 = 1$; donc $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}_0 = \Gamma \mid \mathfrak{A}_0$, et $(\mathfrak{A}, 1) = 48\omega$ divise $16! : 2.3.5.7$; donc ω divise

$$4.9.10.12.14.15.16 = 2^{10}.3^4.5^2.7.$$

De plus, X *est pair* sans quoi il contiendrait (5)

$$\beta_0 = xgydptshmrcuoanlbiqefk \quad (\beta_0^2 = \beta)$$

$\beta_0^{-1}\gamma\beta_0 = \gamma_g$, $\gamma\gamma_g^{-1} = geluhdkiart$, et X contenant une s_{11}^{11} serait le symétrique. Donc $(X, 1) = 23.11(23j + 1)$ et le g^{22} fixant un symbole a un ordre de la forme $11.5(11j_1 + 1)$, d'où

$$23j + 1 = 5(11j_1 + 1) = 2.21.20.48\omega.$$

La condition $23j + 1 \equiv 0 \pmod 5$ donne

$$j = 5j' + 3, \qquad 11j_1 + 1 = 23j' = 14, \qquad j' = 11j'' - 2,$$
$$23(11j'' - 2) + 14 = 2^7.3^2.7\omega, \qquad j'' = 32j''',$$
$$253j''' - 252\omega = 1, \qquad \omega \equiv 1 \pmod{253}.$$

Or les seuls diviseurs de $2^{10}.3^4.5^2.7$ qui soient $\equiv 1 \pmod{253}$ sont 1 et $3^4.5^2$. ω étant premier à 7, Γ ne contient pas de s_7^{11} et, dans le g^{21} de X qui fixe deux symboles, le groupe des opérations permutables à un g_7 est d'ordre 3.7 ou 9.7 (4). Donc

$$(X, 1) = 23.22.3.7(7\omega + 1) \quad \text{ou} \quad 23.22.3^2.7(7\omega + 1).$$

Dans le premier cas $\omega \equiv 1 \pmod 7$; dans le second, $\omega \equiv 3 \pmod 7$. Or $3^4.5^2 \equiv 2 \pmod 7$. Donc $\omega = 1$ et $X \equiv G$.

11. Pour $q = 47$ et $q = 59$, M. Jordan a vérifié que tout g^q ne divisant pas le métacyclique contient l'alterné (*Comptes rendus*, t. LXXIX, 1894, p. 1151). Il suffit, pour refaire cette vérification, de trouver dans chaque $(\alpha, \beta, \gamma_i)$ une s_π^π, π étant premier $< \frac{2}{3} q$, ou même simplement, en se servant d'un théorème de M. Jordan énoncé au n° 5, une $s_\pi^{\varkappa\pi}$, π étant premier, $\varkappa < 6$ et $< \pi$, $\varkappa\pi + \varkappa + 1 < q$.

Sur les séries de polynomes ;

PAR M. H. LAURENT.

On sait qu'une fonction synectique dans un contour fermé peut, d'une infinité de manières, se développer, pour tous les points intérieurs à ce contour, en une série de polynomes. Les méthodes pour arriver au résultat consistent à développer (si l'on veut) d'abord $\frac{1}{z-x}$ et à faire usage de la formule de Cauchy

$$f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x}.$$

Malheureusement les méthodes en question ne fournissent les polynomes ordonnateurs que sous la forme d'intégrales assez difficiles à calculer. Je me suis demandé s'il ne serait pas possible de se donner *a priori* ces polynomes ordonnateurs, et bien que la solution que j'ai trouvée présente encore bien des difficultés dans les applications, elle fournit un assez grand nombre de solutions de la question, comme on le verra dans ce qui suit :

D'après ce qui vient d'être dit, on peut se borner à chercher les développements de $\frac{1}{z-x}$ et c'est ce que j'ai fait.

On verra d'ailleurs que le développement d'une fonction suivant les

polynomes n'est pas un pur objet de curiosité, et qu'il peut fournir, comme la formule de Taylor, des propriétés générales appartenant à toutes les fonctions synectiques.

THÉORÈME I. — *Étant données des séries convergentes en dehors du cercle de rayon* R *décrit de l'origine comme centre*

$$Q_1 = \frac{1}{x} + \frac{q_{12}}{x^2} + \frac{q_{13}}{x^3} + \ldots,$$

$$Q_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{q_{23}}{x^3} + \frac{q_{24}}{x^4} + \ldots,$$

$$Q_3 = \frac{1}{x^3} + \frac{q_{34}}{x^4} + \frac{q_{35}}{x^5} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et où les q_{ij} *sont des coefficients indépendants de* x, *il existera toujours des polynomes entiers en* x, P_0, P_1, P_2, P_3, ... *de degrés* 0, 1, 2, 3, ... *respectivement et tels que les résidus*

$$\mathfrak{L}\, Q_{i+1} P_j \tag{1}$$

soient tous nuls, excepté si $i = j$; *dans ce cas on peut les supposer égaux à l'unité.*

En effet, soit

$$P_i = x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a_i;$$

en égalant à zéro les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans $P_i Q_1$, $P_i Q_2$, ..., $P_i Q_i$, on a

$$\left\{\begin{aligned} a_i + q_{12} a_{i-1} + \ldots + q_{i(i+1)} &= 0, \\ a_{i-1} + a_{i-2} q_{23} + a_{i-3} q_{24} + \ldots + q_{2i+1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 + q_{i\,i+1} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ces équations, à partir de la dernière, déterminent sans ambiguïté a_1, a_2, ... ; quant aux résidus de $P_i Q_{i+1}$, $P_i Q_{i+2}$, ..., ils sont évi-

demment 1, 0, 0, 0, ... respectivement. Notre théorème est donc démontré.

Si, au lieu de se donner les Q, on se donnait les P, les équations (2) détermineraient les q_{ij} et, par suite, les Q, mais rien ne prouve que les séries $Q_1, Q_2, \ldots$ sont convergentes; il faudra donc, après avoir calculé les q_{ij}, s'assurer que les Q sont convergents à l'extérieur d'un cercle de rayon nul ou fini. Donc :

THÉORÈME II. — *Étant donnés des polynomes* $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *de degrés* 0, 1, 2, ..., *il existera des séries* $Q_1, Q_2, \ldots$ *donnant lieu*, FORMELLEMENT, *aux formules*

$$\mathfrak{L}\, Q_{i+1} P_j = 0,$$

excepté pour $i = j$; *ces séries ne seront pas toujours convergentes, mais leurs coefficients seront bien déterminés.*

Supposons les P donnés, formons la série

$$\varphi(x) = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{1}{P_i P_{i+1}} + \ldots;$$

cette série ne sera pas, en général, convergente, mais on peut examiner le cas où elle l'est; en tout cas, on peut poser

$$(3) \qquad \varphi_{ij} = \frac{1}{P_j P_{j+1}} + \frac{1}{P_{j+1} P_{j+2}} + \ldots + \frac{1}{P_{i-1} P_i}.$$

D'après la théorie de l'élimination, il existe des polynomes N_0, $N_1, \ldots, N_i, \ldots$ des degrés 0, 1, 2, ..., n, ... tels que

$$P_i N_{i+1} - N_i P_{i+1} = 1.$$

Mais alors il faut que P_i et P_{i+1} n'aient pas de facteur commun, et

$$\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} - \frac{N_i}{P_i} = \frac{1}{P_i P_{i+1}},$$

et par suite

$$\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} = \frac{N_0}{P_0} + \left(\frac{N_1}{P_1} - \frac{N_0}{P_0}\right) + \ldots + \left(\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} + \frac{N_i}{P_i}\right),$$

ou

$$\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} = \frac{N_0}{P_0} + \frac{1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{1}{P_i P_{i+1}},$$

et aussi

$$\frac{N_i}{P_i} - \frac{N_j}{P_j} = \frac{1}{P_j P_{j+1}} + \frac{1}{P_{j+1} P_{j+2}} + \ldots + \frac{1}{P_{i-1} P_i} = \varphi_{ji}.$$

Si l'on multiplie cette quantité φ_{ij} par $P_j P_i$, on obtient un résultat entier, donc

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_i P_j = 0;$$

si on le multiplie par $P_k P_j$, k étant inférieur à i, on a évidemment

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_k P_j = 0;$$

on a aussi

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_j^2 = 1;$$

si k est compris entre i et j, on a

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_j P_k = \mathcal{E}\, \varphi_{jk} P_j P_k + \mathcal{E}\, \varphi_{ki} P_j P_k.$$

Les deux derniers résidus sont nuls, en vertu des remarques précédentes, donc $\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_i P_k$ est nul toutes les fois que $k < i$, et, en particulier, on aura (excepté si $j = k$)

$$\mathcal{E}\, \varphi_{j\infty} P_i P_k = 0;$$

donc on pourra prendre

$$(4) \qquad Q_{j+1} = \varphi_{j\infty} P_j.$$

(Il ne faut pas oublier que les P ont été supposés tels que P_j et P_{j+1}

n'ont pas de facteur commun. Ainsi, en prenant $P_1 = x$, $P_2 = x^2, \ldots,$ $P_j = x^j, \ldots$ et

$$Q_{j+1} = \frac{1}{x^{j-1}} + \frac{1}{x^{j+3}} + \ldots,$$

on n'aurait pas $\int Q_j x^k = 0$ si $k > j$.)

Lorsque, dans (1), on fait $j = 0$, on a $P_0 = 1$ et

$$Q_1 = \varphi_{0x} = \frac{1}{P_0 P_1} + \frac{1}{P_1 P_2} + \ldots = \varphi - 1,$$

et $\varphi = 1 + Q_1$; φ, on le voit, doit être convergent hors d'un cercle ayant son centre à l'origine.

Nous avons assujetti les polynomes P à satisfaire à la condition

$$\int P_i Q_{i+1} = 1;$$

on aurait pu les assujettir simplement à donner d'autres valeurs différentes de zéro et fonctions de l'indice i; on se donne ainsi plus de latitude.

Posons

$$\psi(x) = \frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}{P_{n-1} P_n} + \ldots,$$

on pourra choisir les α de manière à rendre la série ψ convergente si la série que nous avons désignée par φ ne l'est pas; et, si l'on pose

$$\psi_{ij} = \frac{\alpha_0 \ldots \alpha_{j+1}}{P_j P_{j+1}} + \ldots + \frac{\alpha_0 \ldots \alpha_{i+1}}{P_i P_{i+1}},$$

il existera des polynomes de degrés i et $i+1$ tels que

$$N_{i+1} P_i - N_i P_{i+1} = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1},$$

ou

$$\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} - \frac{N_i}{P_i} = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1}}{P_{i+1} P_i};$$

et, par suite,

$$\frac{N_i}{P_i} = \frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} \ldots \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_i}{P_{i-1} P_i},$$

et

$$\frac{N_i}{P_i} - \frac{N_j}{P_j} = \frac{\alpha_i \ldots \alpha_{j+1}}{P_j P_{j+1}} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1}}{P_i P_{i+1}} \psi_{ij}.$$

On verra alors, comme plus haut, que

$$\int \psi_{jx} P_j P_k = 0 \qquad \text{si } j \gtrless k,$$

et que

$$\int \psi_{jx} P_j^2 = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{j+1}$$

si le coefficient de Hx^j dans P_j est égal à 1; alors, en faisant

$$\psi_{jx} P_j = Q_{j+1},$$

on aura

$$\int Q_{j+1} P_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \gtrless j, \\ \alpha_0 \ldots \alpha_{j+1} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Considérons maintenant une suite de fonctions entières $P_0 = 1$, P_1, $P_2, \ldots$ des degrés $0, 1, 2, \ldots$ en x. Supposons, ce qui est toujours permis, que le coefficient de x^n dans P_n ait été réduit à l'unité. Supposons, enfin, qu'il ait été possible de choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ de manière à rendre la série

$$\frac{\alpha_0}{P_0} + Q_1 = \frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_i}{P_{i-1} P_i} + \ldots$$

convergente pour une certaine valeur r du module de x et pour des valeurs plus grandes (la série Q_1 étant ordonnée si l'on veut par rapport aux puissances de $\frac{1}{x}$, cette série sera convergente en dehors d'un cercle décrit de l'origine comme centre).

Tout polynome $F(x)$ du degré n pourra se mettre sous la forme

$$F(x) = g_0 P_0 + g_1 P_1 + \ldots + g_n P_n,$$

$g_0, g_1, \ldots$ étant indépendants de x; alors en multipliant par Q_{i+1} et

en prenant des résidus, on aura

$$\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1} g_i = \int F(x) Q_{i+1},$$

et, par suite,

$$F(x) = \frac{P_0}{\alpha_0 \alpha_1} \int F(x) Q_1 + \ldots + \frac{P_n}{\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}} \int F(x) Q_{n+1};$$

et, en particulier, si l'on pose

$$Q_1 = \frac{q_{11}}{x} + \frac{q_{12}}{x^2} + \ldots, \qquad q_{11} = \alpha_0 \alpha_1,$$

$$Q_2 = \frac{q_{22}}{x^2} + \frac{q_{23}}{x^3} + \ldots, \qquad q_{22} = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$Q_n = \frac{q_{nn}}{x^n} + \frac{q_{nn+1}}{x^{n+1}} + \ldots, \qquad q_{nn} = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n,$$

on aura

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^n = P_0 \dfrac{q_{1n+1}}{\alpha_0 \alpha_1} + P_1 \dfrac{q_{2n+1}}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} + \ldots + P_n, \\ x^{n+1} = P_0 \dfrac{q_{1n}}{\alpha_0 \alpha_1} + P_1 \dfrac{q_{2n}}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} + \ldots + P_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x = P_0 \dfrac{q_{12}}{\alpha_0 \alpha_1} + P_1, \\ 1 = P_0. \end{array} \right.$$

On tire de là

$$(6) \qquad P_n = \begin{vmatrix} x^n & \dfrac{q_{1n+1}}{\alpha_0 \alpha_1} & \dfrac{q_{2n+1}}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} & \ldots & \dfrac{q_{nn+1}}{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \\ x^{n-1} & \dfrac{q_{1n}}{\alpha_0 \alpha_1} & \dfrac{q_{2n}}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & \dfrac{q_{12}}{\alpha_0 \alpha_1} & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Les α sont toujours arbitraires, à cela près que Q_1 doit être conver-

gent, nous supposerons qu'on les ait choisis de telle sorte que non seulement Q_i soit convergent, mais encore de telle sorte que le produit $H = z\frac{Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} z^2 \frac{Q_2(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} z^3 \frac{Q_3(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \cdots$ soit lui-même convergent et absolument convergent. La formule (6), en désignant toujours par r le module de x, par r'_{ij} celui de q_{ij} et par α'_i celui de α_i, donne

$$\operatorname{mod} P_n < (1 + r + \ldots + r^n)\left(1 + \frac{q'_{12}}{\alpha'_0\alpha'_1} + \ldots + \frac{q'_{n,n+1}}{\alpha'_0\alpha'_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{q'_{n,n+1}}{\alpha'_0\ldots\alpha'_n}\right).$$

Soit ρ le module de z, supposons le produit H convergent pour $z = 1$, soit η son module pour $z = 1$; la formule précédente donnera

$$\operatorname{mod} P_n < \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\eta.$$

Considérons alors la série suivante où $\rho > r$:

$$(7) \qquad \frac{P_0(x)Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} + \frac{P_1(x)Q_2(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots:$$

son terme général $\frac{P_0(x)Q_{n+1}(z)}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}$ aura un module moindre que

$$\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\eta\left(\frac{q'_{n+1,n+1} + \ldots}{\alpha'_0\ldots\alpha'_{n+1}}\right)\frac{1}{\rho^{n+1}}.$$

Supposons $\rho > r$, la racine n de cette quantité finira par devenir inférieure à l'unité, la quantité entre parenthèses ayant pour limite *un*; la série (7) est donc convergente dans les hypothèses que nous avons faites. Sa valeur est facile à calculer; en effet, des formules (5) on tire

$$\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} = P_0(x)\frac{Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} + \ldots + P_n(x)\frac{Q_n(z)}{\alpha_0\ldots\alpha_{n+1}} + \lambda,$$

λ étant une quantité qui contient une partie des termes de l'expression (7) changés de signe, dans lesquels $\frac{1}{z^n}$ entre en facteur; λ tend vers zéro quand n croît indéfiniment, en sorte que, pour $n = \infty$, la

formule précédente devient

$$(8)\qquad \frac{1}{z-x} = P_0(x)\frac{Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} + P_1(x)\frac{Q_2(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots$$

Il est hors de doute que cette formule en général doit avoir lieu avec des hypothèses moins restrictives que celles que nous avons faites. Supposons donc que, en procédant d'une manière quelconque, on ait trouvé pour chaque valeur de z, par exemple, la région dans laquelle se trouvent les valeurs de x qui rendent le second membre de (8) convergent, cette région R contiendra celle que nous avons trouvée R′; or, dans la région R, $\frac{1}{z-x}$ et le second membre de (8) sont synectiques, elles sont égales dans la région finie R′, donc elles sont encore égales dans la région R.

Pour trouver des développements de $\frac{1}{z-x}$ en série de polynomes, on peut partir des Q ou des P; mais en partant des P, quoique la méthode paraisse plus féconde, on s'impose une obligation : P_i et P_{i+1} doivent être premiers entre eux (en réalité, on pourrait s'affranchir de cette obligation, mais ce serait au prix de complications gênantes). Nous allons maintenant faire quelques applications.

Supposons que l'on prenne $a_1 = \frac{1}{V_1}$, $Q_2 = \frac{1}{V^2}\cdots$, $V_1, V_2, \ldots$, désignant des polynomes entiers de degrés $1, 2, \ldots$ de la forme

$$V_n = (x - a_{n1})\ldots(x - a_{nn});$$

les a étant indépendants de x, on aura

$$z_n Q_n(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a_{n1}}{z}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_{nn}}{z}\right)}.$$

L'expression des P sera, en général, compliquée, et pour qu'ils soient d'une forme utile il faut restreindre la généralité des V. Aussi astreindrons-nous les P à être égaux aux V. Il faudra donc trouver des polynomes V tels que

$$\mathcal{E}\frac{V_i}{V_j} = 0 \qquad \text{si} \qquad i \gtrless j+1, \qquad \mathcal{E}\frac{V_i}{V_{i+1}} = 1;$$

la dernière condition est satisfaite d'elle-même, la première l'est si $j > i + 1$. On a donc à satisfaire aux équations

$$\mathfrak{L}\frac{V_2}{V_1} = 0,$$

$$\mathfrak{L}\frac{V_3}{V_1} = 0, \qquad \mathfrak{L}\frac{V_3}{V_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La première équation détermine V_2, les deux suivantes déterminent V_3, etc., mais V_1, V_2, ... conservent chacune un coefficient arbitraire. On peut donc poser

$$V_1 = x - a_1,$$

a_1 étant arbitraire; l'équation

$$\mathfrak{L}\frac{V_2}{V_1} = 0$$

donne

$$\frac{V_2(a_1)}{V_1'(a_1)} = 0 \qquad \text{ou} \qquad V_2(a_1) = 0;$$

donc, on doit poser

$$V_2 = (x - a_1)(x - a_2);$$

a_2 est arbitraire. Les formules

$$\mathfrak{L}\frac{V_2}{V_1} = 0, \qquad \mathfrak{L}\frac{V_3}{V_2} = 0$$

donnent

$$\frac{V_3(a_1)}{V_1'(a_1)} = 0, \qquad \frac{V_3(a_1)}{V_2'(a_1)} + \frac{V_3(a_2)}{V_2'(a_2)} = 0$$

ou

$$V_3(a_1) = 0, \qquad V_3(a_2) = 0;$$

donc

$$V_3 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3),$$

et a_3 est arbitraire, et ainsi de suite. On a alors

$$\frac{z^n - x^n}{z^n(z - x)} = \mathfrak{L}\frac{z^n - x^n}{z^n(z - x)}\frac{1}{x - a_1} + \ldots$$
$$+ \left(\mathfrak{L}\frac{z^n - x^n}{z^n(z - x)}\frac{1}{(x - a_1)\ldots(x - a_{n+1})}\right)V_n$$

ou

$$\frac{1}{z-x}-\frac{x^n}{z^n(z-x)}=\frac{1}{z-a_1}+\frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(z-a_1)\ldots(z-a_{n+1})}$$
$$-\frac{1}{z^n}\left[\mathcal{E}\frac{x^n}{z-x}\frac{1}{x-a_1}+\ldots+V_n\mathcal{E}\frac{x^n}{z-x}\frac{1}{(x-a_1)\ldots(x-a_{n+1})}\right].$$

Et si la série, dont le terme général est $\frac{V_n(x)}{V_n(z)}$, est convergente, on aura, en faisant $n=\infty$,

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a_1}=\frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}+\ldots.$$

On rencontre fréquemment en Analyse des polynomes P_n de degré n, liés entre eux par une équation aux différences finies de la forme

$$P_{n+1}=(\beta_{n+1}x+\gamma_{n+1})P_n-\alpha_{n+1}P_{n-1}$$

où les α, les β et les γ sont indépendants de x; il existe alors des polynomes N_n différents des P et tels que

$$N_{n+1}=(\beta_{n+1}x+\gamma_{n+1})N_n-\alpha_{n+1}N_{n-1},$$

N_n étant toujours de degré N, en éliminant $\beta_{n+1}x+\gamma_{n+1}$. On a

$$P_{n+1}N_n-N_{n+1}P_n=(P_nN_{n-1}-N_nP_{n-1})\alpha_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$=(P_1N_0-N_1P_0)\alpha_2\alpha_0\ldots\alpha_{n+1}.$$

Or N_0 et N_1 renfermant trois coefficients, on peut en disposer de telle sorte que $P_1N_0-N_1P_0=-\alpha_0\alpha_1$ et finalement on a

$$\frac{N_{n+1}}{P_{n+1}}-\frac{N_n}{P_n}=\frac{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}{P_nP_{n+1}}$$

et

$$\frac{N_i}{P_i}-\frac{N_j}{P_j}=\frac{\alpha_0\ldots\alpha_{j+1}}{P_jP_{j+1}}+\ldots+\frac{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_i}{P_{i-1}P_i}.$$

Si la série

$$\sum\frac{\alpha_0\ldots\alpha_i}{P_iP_j}$$

est convergente et si l'on pose

$$Q_{j+1} = P_j\left(\frac{\alpha_0\ldots\alpha_{j+1}}{P_jP_{j+1}} + \frac{\alpha_0\ldots\alpha_{j+2}}{P_{j+1}P_{j+2}} + \ldots\right),$$

on aura, comme plus haut,

$$\mathcal{L}\, Q_{j+1}P_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j, \\ \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{j+1}\dfrac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}, \end{cases}$$

λ_i désignant le coefficient de x^j dans P_j qui, ici, n'est plus égal à 1. Une discussion analogue à celle qui a déjà été faite permettra souvent de développer $\frac{1}{z-x}$, suivant une série de polynomes P.

Si l'on pose $P_n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, P_{n+1} et P_{n-1} n'auront pas de facteur commun; la série

$$\sum \frac{1}{(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)}$$

et, par suite,

$$\sum \frac{x^2 - 1}{(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)} = \sum \frac{1}{P_nP_{n+1}}$$

sera convergente pour mod $x > 1$ et le cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre, sera pour cette série une coupure; la série

$$P_0(x)Q_1(z) + P_1(x)Q_2(z) + \ldots$$

sera convergente pour mod $z > 1$ et mod $x < 1$; elle représentera $\frac{1}{z-x}$.

Si l'on suppose que P_n soit le polynome de X_n de Legendre, on sait que la série $\sum \frac{1}{P_nP_{n+1}}$ est convergente pour mod $x > 1$ et que $\frac{1}{z-x}$ est développable en série de polynomes P_n. M. Heine a donné une expression des coefficients; nos méthodes donnent une nouvelle expression de ces coefficients.

Supposons que l'on prenne

$$Q_1 = \frac{V'}{V}, \qquad Q_2 = \frac{d}{dx}\frac{V'}{V}, \qquad \ldots, \qquad Q_n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{V'}{V}, \qquad \ldots,$$

V désignant un polynome entier ayant pour racines $a_1, a_2, \ldots, a_0$, nous n'aurons plus pour les Q_i des séries commençant par des termes dont les coefficients seront égaux à l'unité, mais nous poserons toujours

$$\mathcal{E} Q_{i+1} P_j = 0 \qquad \text{si} \qquad i \gtrless j,$$

$$\mathcal{E} Q_{i+1} P_i \text{ différent de } 0.$$

Si $i < j$ ces formules sont satisfaites. Supposons donc $i > j$ ou $i = j$; si nous intégrons par parties, nous avons

$$\mathcal{E} Q_{j+i} P_i$$

ou

$$\mathcal{E}\left(\frac{d^j}{dx^j}\frac{V'}{V}\right) P_i = (-1)\,\mathcal{E}\left(\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\frac{V'}{V}\right) P_i' = \ldots;$$

$$(-1)^j\,\mathcal{E}\,\frac{V'}{V}\,P_i^j = (-1)^j \Sigma P_i^j(a_k),$$

et le dernier membre se réduit à $(-1)^j j!\,s$ si $i = j$. Le polynome P_i est donc déterminé par les relations

$$\Sigma P_i(a_k) = 0, \qquad \Sigma P_i'(a_k) = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma P_i^{i-1}(a_k) = 0;$$
$$\Sigma P_i^i(a_k) = (-1)^i i!\,s.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$F(x) = g_0 P_0 + g_1 P_1 + \ldots + g_n P_n,$$

F désignant un polynome de degré n, on aura

$$\mathcal{E} Q_{i+1} F(x) = g_i (-1)^i i!\,s.$$

Or

$$\mathcal{E} Q_{i+1} F(x) = \mathcal{E} F(x) \frac{d^i}{dx^i}\frac{V'}{V} = (-1)^i\,\mathcal{E}\,\frac{V'}{V} F^i(x)$$
$$= (-1)^i \Sigma F^i(a_k);$$

de sorte que

$$\Sigma F^i(a_k) = g_i\, i!\, s, \qquad g_i = \frac{1}{i!\, s}\Sigma F_i(a_k),$$

et, par suite,

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{s}\Sigma F(a_k) + \ldots + \frac{P_i}{i!\, s}\Sigma F^i(a_k) + \ldots.$$

Il est bon d'observer que cette formule ne se déduit pas directement de la formule de Taylor, laquelle donne

$$F(x) = F(a_k) + (x - a)F'(a_k) + \ldots + \frac{(x - a_k)^i}{i!} F^i(a_k) + \ldots,$$

et en faisant $k = 1, 2, \ldots$, ajoutant et divisant par s,

$$F(x) = \frac{1}{s}\sum F(a_k) + \ldots + \sum \frac{(x - a_k)^i}{i!\, s} F^i(a_k) + \ldots.$$

Cette formule ressemble beaucoup à celle que nous avons obtenue tout à l'heure, mais elle ne lui est pas identique, ou, pour parler plus exactement, elles ne sont pas composées des mêmes termes, car au fond les coefficients des mêmes puissances de x sont les mêmes.

Si dans (1) on fait $F(x) = 1, x, x^2, \ldots$, et si l'on pose $\Sigma a_k^p = \sigma_p$, on a

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} s \quad = \sigma_0, \\ s.x \ = \sigma_1 + P_1\sigma_0, \\ s.x^2 = \sigma_2 + P_1 2\sigma_1 + P_2\sigma_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s.x^n = \sigma_n + \frac{n}{1}\sigma_{n-1}P_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\sigma_{n-2}P_2 + \ldots + \sigma_n P_n. \end{array}\right.$$

ormules d'où l'on peut tirer P_n de proche en proche, ou sous forme de déterminant. Mais on peut obtenir P_n autrement.

Posons, en effet,

$$\varphi(x, t) = P_0 + P_1\frac{t}{1} + \ldots + P_n^n\frac{t^n}{n!} + \ldots;$$

on a

$$\Sigma e^{ta} = \sigma_0 + \frac{t}{1}\sigma_1 + \ldots + \frac{t^n}{n!}\sigma_n + \ldots,$$

et, par suite,

$$\varphi(x, t)\Sigma e^{ta} = P_0\sigma_0 + \ldots + \frac{t^n}{n!}\left(\sigma_n P_0 + \frac{n}{1}\sigma_{n-1}P_1 + \ldots\right)$$
$$= s\left(1 + \ldots + \frac{t^n}{n!}x^n + \ldots\right) = se^{tx};$$

donc

$$\varphi(x, t) = \frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}}.$$

On a donc

$$P_n = \left(\frac{d^n}{dt^n}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}}\right)_{t=0},$$

ou encore

$$\frac{P_n}{n!} = \int \frac{1}{t^{n+1}}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}},$$

ou

$$(3) \qquad \frac{1}{n!}P_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{dt}{t^{n+1}}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon r décrit de l'origine comme centre.

Ces conclusions sont soumises à des restrictions : il faut que la fonction

$$\varphi(x, t) = \frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}}$$

soit développable suivant les puissances de t, pour une valeur positive de r. Cela exige que l'équation

$$\Sigma e^{ta} = 0$$

n'ait pas de racines de module inférieur à r, et la formule (2) n'aura lieu que si le cercle le long duquel on intègre a un rayon r moindre que le plus petit des modules des racines de $\Sigma e^{at} = 2$, équation qui ne devra pas avoir de racines réelles. Or Σe^{at} est égal à $\sigma_0 + t\frac{\sigma_1}{1}\ldots$, et comme σ_0 n'est jamais nul, cette circonstance ne se présentera pas, et la formule (2) sera exacte pour une valeur positive de r.

La formule (3) montre que

$$\frac{1}{n!}\frac{dP_n}{dx} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{dt}{t^n}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}} = \frac{1}{(n-1)!}P_{n-1},$$

donc

$$\frac{dP_n}{dx} = nP_{n-1}$$

et les polynomes $\frac{P_n}{n!}$ sont les intégrales successives de l'unité, prises entre des limites qui varient avec chaque intégration.

Les constantes d'intégration se détermineront en exprimant que $\Sigma P_n(a_k) = (-1)^n n!\, s$.

Maintenant supposons mod $a_k = \rho_k < 1$. Les formules (2) donneront pour P_n un déterminant dont le module sera inférieur à

$$S\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\sum\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1}\frac{1}{1}\sum\frac{d}{d\rho}\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1}\frac{1}{1.2}\sum\frac{d^2}{d\rho^2}\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1}\cdots,$$

r désignant toujours le module de x, et *a fortiori*

$$\text{mod}\, P_n < S\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\sum\frac{1}{1-\rho}\sum\frac{1}{(1-\rho)^2}\sum\frac{1}{(1-\rho)^3}\cdots,$$

ou, en appelant ν la plus petite différence $1-\rho$,

$$\text{mod}\, P_n < S^n\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\frac{1}{\nu}\frac{1}{\nu^2}\cdots\frac{1}{\nu^{n-1}}$$

ou

$$< S^n\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\frac{1}{\nu^{\frac{n(n-1)}{2}}};$$

c'est, si r est suffisamment petit, le terme général d'une série absolument et uniformément convergente; on a $\sqrt[n]{P_n} < 1$. Or $\frac{1}{i}\frac{d^i}{dz^i}\frac{V'}{V}$, coefficient du terme général de la série $\frac{V'(z+h)}{V(z+h)}$, a aussi, pour des valeurs assez grandes de mod z, une racine $n^{\text{ième}}$ inférieure à 1; donc pour des valeurs convenables de x et z la série

$$y = P_0\frac{V'}{V} - P_1\frac{d}{dz}\frac{V'}{V} + \cdots,$$

où P_n est fonction de x et V fonction de z, est uniformément convergente. Or on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

donc y est fonction de $z - x$. Et, en suivant la marche indiquée dans le cas général, on a

$$y = \frac{1}{z - x}.$$

On en déduit facilement la généralisation de la formule (1).

La formule

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a_1} &+ \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \ldots \\ &+ \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})(z-a_n)} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

que j'ai rencontrée dans un Mémoire de M. Frobenius, est très remarquable, car elle fait connaître une propriété générale des fonctions synectiques; on peut, comme l'a fait M. Frobenius, l'arrêter au dernier terme écrit et la compléter par un reste de la forme

$$(2)\qquad \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}\,\frac{1}{z-x},$$

ce dont on se convainc aisément, en observant qu'on a les identités successives

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-x} &= \frac{1}{z-a_1} + \frac{x-a_1}{z-a_1}\,\frac{1}{z-x} \\ &= \frac{1}{z-a_1} + \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(z-a_1)(z-a_2)}\,\frac{1}{z-x} = \ldots; \end{aligned}$$

alors $a_1, a_2, \ldots$ sont tout à fait arbitraires. Si l'on veut que le second membre de (1) soit convergent et représente $z - x$, il faut que le reste (2) tende vers zéro; or le facteur qui multiplie $\frac{1}{z-x}$ dans le

reste peut s'écrire

$$\left(1-\frac{z-x}{z-a_1}\right)\left(1-\frac{z-x}{z-a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z-x}{z-a_n}\right);$$

il tendra vers zéro si

$$\operatorname{Lim}\operatorname{mod}\left(1-\frac{z-x}{z-a_n}\right)=\varepsilon,$$

ε désignant un nombre inférieur à l'unité, ou si

$$\operatorname{Lim}\operatorname{mod}\frac{x-a_n}{z-a_n}=\varepsilon.$$

Pour cela, il faut et il suffit que les droites qui joignent x aux points a_n finissent par rester moindres que celles qui joignent le point z aux mêmes points d'une quantité finie.

Soit a un point vers lequel convergent les points $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$: si de ce point a comme centre on décrit deux cercles de rayons r et ρ, r étant moindre que ρ, le produit (2) tendra vers zéro si x reste intérieur au premier cercle et ρ extérieur au second.

Supposons qu'il en soit ainsi et soient $f(z)$ une fonction synectique à l'intérieur du second cercle, x un point intérieur au premier. Multiplions (1) par $f(z)$ et prenons les résidus, c'est-à-dire intégrons le long du cercle de rayon ρ; nous aurons

$$f(x)=f(a_1)+\ldots+\mathcal{E}\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}f(z)\ldots;$$

en posant pour abréger

$$F_n(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n),$$

on a

$$f(x)=f(a_1)+\ldots+(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(a_i)}{F'(a_i)}+\ldots.$$

Voici quelques réflexions que suggère cette formule :

1° La fonction synectique $f(x)$ dans une aire A, contenant les

points $a_1, a_2, \ldots$ qui tendent vers un point fixe a de cette aire, est bien déterminée, non pas seulement, comme on a l'habitude de le dire, quand elle est donnée dans une portion finie de cette aire, mais quand elle est donnée en des points formant une succession discontinue tendant vers un point limite a contenu dans l'aire A.

2° En traitant la formule (1) comme M. Painlevé a traité la formule

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots,$$

qui n'en est qu'un cas particulier, on démontre que $f(x)$ est développable en une série de polynomes, mais on obtient un plus grand nombre de développements que par le procédé de M. Painlevé.

3° Supposons que la fonction $f(z)$ ne soit pas synectique autour du point a, et que le point soit essentiel. Décrivons autour de ce point un cercle de rayon $r' < r$, et supposons x compris dans la couronne de rayons r et r' ayant son centre en a. Sur le cercle r' on aura, z étant un point de la circonférence,

$$-\frac{1}{z-x} = \frac{1}{a-a_1} + \frac{z-a_1}{(x-a_1)(x-a_2)} + \ldots;$$

tandis que si z' est sur l'autre cercle, on aura

$$\frac{1}{z'-x} = \frac{1}{z'-a_1} + \frac{x-a_1}{(z'-a_1)(z'-a_2)} + \ldots;$$

de sorte que si l'on multiplie $\frac{1}{z-x}$ et $\frac{1}{z'-x}$ par $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} f(z)$ et par $-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} f(z')$, et si l'on intègre le long des cercles de rayons r et r', on trouvera pour $f(x)$ un développement dont les termes seront de la forme

$$A(x-a_1)\ldots(x-a_n)$$

et

$$\frac{A'}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)},$$

A et A′ désignant des constantes.

Donc, dans le voisinage d'un point essentiel, une fonction se compose d'une partie entière et d'une partie de la forme

$$\sum \frac{A}{(x-a_1)\ldots(x-a_n)},$$

$a_1, a_2, \ldots$ désignant des valeurs convergeant vers le point essentiel, et cela d'une infinité de manières.

La formule

$$F(x) = \frac{1}{s}\Sigma F(a_k) + \ldots + \frac{P_i}{r!s}\Sigma F_i(a_k)\ldots$$

montre que, $a_1, a_2, \ldots$ étant des valeurs quelconques et F une fonction synectique, si $\Sigma F(a)$, $\Sigma F'(a)$, ... sont nuls, $F(x)$ est nulle.

Sur les fonctions entières et quasi entières;

PAR M. EDM. MAILLET.

I. — Introduction.

Dans ce Mémoire nous étudions d'abord un certain nombre de propriétés nouvelles des racines des fonctions entières de genre fini; nous étendons ensuite un assez grand nombre de propriétés des fonctions entières et méromorphes aux fonctions que nous appelons *quasi entières* et *quasi méromorphes*.

1. *Fonctions entières.* — Nous reprenons d'abord, pour plus de clarté, la démonstration de quelques propriétés des fonctions entières. Nous établissons ensuite les résultats suivants :

1° Étant donné un produit canonique de facteurs primaires d'ordre ρ, et un nombre positif arbitraire ε; si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon η fini ($\eta \leqq 1$ arbitraire), en tout point extérieur à ces cercles on a, pour $|z| = r$ assez grand, les inégalités

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ quelconque, ρ désignant alors son ordre apparent;

2° Soient $f(z) = A_0 + A_2 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$ une fonction entière d'ordre fini ρ', et

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l.$$

Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de $f_l(z)$ de module inférieur à $\frac{1}{l^{\rho+\varepsilon}}$ correspond une racine de $f(z)$, les modules des deux racines différant d'aussi peu qu'on veut pourvu que l soit assez grand;

3° Pour une fonction entière $F(z)$ d'ordre apparent ρ' fini, les sommes des inverses des puissances entières $m > \rho'$ des racines se calculent comme pour un polynome par les formules de récurrence de Newton.

On en conclut diverses applications aux conditions de réalité des racines de $F(z)$, aux conditions pour que ces racines soient toutes positives ou négatives, à la détermination du facteur exponentiel de $F(z)$, aux fonctions entières simples, à l'invariance de certaines fonctions des coefficients de $F(z)$ quand on multiplie $F(z)$ par un facteur exponentiel.

II. *Fonctions quasi entières et quasi méromorphes.* — Une fonction monodrome $f(z)$ n'ayant dans le plan des z d'autres points critiques que $\infty, a_0, \ldots, a_k$ (k fini) est développable en une série de la forme

$$f = \psi(z) + \psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

$\psi(z), \psi_0(z), \ldots, \psi_k(z)$ étant des fonctions entières. Mais on peut aussi la mettre sous la forme

$$f = \varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\ldots\varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

où $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$ sont des fonctions entières; il y a réciprocité.

Nous montrons que, si $\psi(z), \psi_0(z), \ldots, \psi_k(z)$ sont d'ordres finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, il en est de même respectivement de $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit alors à croissance régulière aux environs de $z = a_i$ est que $\psi_i(z)$ soit à croissance régulière (au sens de M. Borel). Quand $f(z)$ a ses ordres tous < 2, est réel et n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires,

la dérivée $f'(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires. Enfin, parmi les équations $f + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$, où φ_1 et φ ont tous leurs ordres inférieurs à ceux de f, il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à ρ_i pour $z = a_i$, et, *a fortiori*, d'ordres réels tous inférieurs à $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$ respectivement. Il y a des extensions au cas où $f(z)$ est d'ordre infini.

Quand $k = 0$, $a_0 = 0$, on peut établir pour les fonctions quasi entières des propriétés correspondantes aux propriétés 1° et 2° ci-dessus.

Enfin, nous considérons les fonctions quasi méromorphes $F(z)$, quotients de deux fonctions quasi entières; si ρ et σ sont les ordres pour $z = \infty$ du numérateur et du dénominateur, τ le plus grand de ces deux nombres, nous disons que $F(z)$ est d'ordre τ pour $z = \infty$.

Ceci posé, parmi les équations

$$F = \varphi,$$

où φ est une fonction quasi méromorphe quelconque d'ordres tous inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$, il y en a au plus une pour laquelle tous les ordres réels sont inférieurs à ceux de F. Il y en a au plus deux pour lesquelles les exposants de convergence des suites des modules des racines sont inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ à la fois.

Il est probablement possible d'étendre aux fonctions quasi entières les théorèmes relatifs : 1° à la réalité des racines des dérivées des fonctions entières quand l'ordre est quelconque; 2° aux racines des équations $F = \varphi$ (φ fonction entière quelconque d'ordre fini, F fonction entière donnée d'ordre infini), en suivant en partie la marche employée par M. Borel [1]. Nous laissons provisoirement ces points de côté.

Pour pouvoir lire notre Mémoire, il suffit de connaître :

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique;

Borel, *Leçons sur les fonctions entières;* Paris, 1900;

---

[1] Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Gauthier-Villars, 1900, p. 36 et suivantes, et *Acta mathematica*, t. XX, p. 357.

Borel, *Annales de l'École Normale*, 1901, p. 215 et suivantes (quelques pages seulement).

Il sera bon néanmoins de lire Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. V, *passim*.

PREMIÈRE PARTIE.

II. — Fonctions entières.

Nous rappellerons d'abord, pour la clarté de ce qui suit, quelques-unes des définitions ou quelques-uns des théorèmes relatifs aux fonctions entières de genre fini.

Ordre. — Soit M_r la valeur maxima du module d'une fonction entière $F(z)$ de genre fini quand $|z| = r$: on sait que, quand $F(z)$ a une infinité de racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

il existe un nombre fini positif ρ, qui est l'*exposant de convergence* [1], et tel que

$$(1) \qquad \sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{\rho-\varepsilon}} \qquad (r_n = |a_n|)$$

diverge, tandis que

$$(2) \qquad \sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

(ε positif aussi petit qu'on veut, mais fini) converge : ρ est aussi l'*ordre réel* [2] *de* $F(z)$.

---

[1] Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 18.

[2] Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 26.

On peut toujours écrire

$$F(z) = e^{Q(z)}\,\Pi(z), \tag{3}$$

$\Pi(z)$ étant un produit canonique de facteurs primaires et $Q(z)$ un polynome de degré q; le plus grand des deux nombres ρ et q est l'*ordre apparent* (¹) ρ' de $F(z)$. Soit k le plus petit nombre entier tel que $\sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{k+1}}$ converge; le plus grand des deux nombres entiers k et q est le *genre de* $F(z)$.

On a

$$|F(z)| < e^{r^{\rho'+\varepsilon_1}} \quad (^2) \tag{4}$$

(ε_1 aussi petit qu'on veut et positif, mais fini), dès que r est suffisamment grand.

De même, pour une infinité de valeurs de $r = |z|$,

$$|F(z)| > e^{r^{\rho'-\varepsilon_2}} \tag{5}$$

(ε_2 aussi petit qu'on veut et positif, mais fini).

En effet, ceci est évident quand $\rho < \rho'$. Soit $\rho = \rho'$; admettons que, quand r dépasse une certaine limite,

$$|F(z)| < e^{r^\sigma}$$

avec $\sigma \leqq \rho' - \zeta$ (ζ fini positif). On aura (³)

$$r_n > n^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon_3}}, \tag{6}$$

$$r_n^{\sigma+\varepsilon_4} > n^{1+\eta}$$

(¹) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 74. Pour ce paragraphe, *voir* E. Lindelöf, *Acta Societ. scient. fennicæ*, t. XXXI, n° 1, Helsingfors, 1902.

(²) Borel, *loc. cit.*, p. 61.

(³) *Ibid.*, p. 74.

(η fini, ε_3, ε_4 finis positifs aussi petits qu'on veut pour n assez grand). La série

$$\sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{\eta-\varepsilon_3}} < \sum_0^\infty \frac{1}{n^{1+\eta}}$$

converge; donc

$$\sigma + \varepsilon_4 > \rho - \varepsilon = \rho' - \varepsilon,$$

et $\sigma \leq \rho' - \zeta$ est impossible, dès que r dépasse une certaine limite.

Valeur asymptotique des coefficients. — *On peut écrire, si*

$$F(z) = \sum_0^\infty A_l z^l; \tag{7}$$

$$A_l = \left(\frac{1}{l}\right)^{l\left(\frac{1}{\rho'}+\varepsilon\right)} \tag{8}$$

pour une infinité de valeurs de l, les autres coefficients (sauf un nombre fini) ayant une valeur inférieure à celle indiquée par (8).

En effet, il suffit de modifier, en le précisant, le raisonnement qui conduit à l'inégalité de M. Poincaré [1] pour A_j.

Posons

$$J(z) = (\rho' + 2\varepsilon) \int_0^\infty e^{-r_1^{\rho'+2\varepsilon}} F(r_1 z) r_1^h \, dr_1$$

(h positif arbitraire). A partir d'une certaine valeur de r_1,

$$|F(r_1 z)| < e^{|z|^{\rho'+\varepsilon} r_1^{\rho'+\varepsilon}},$$

et l'intégrale $J(z)$ a ses éléments inférieurs à ceux de

$$\int_0^\infty e^{-\beta r_1^{\rho'+2\varepsilon}} r_1^h \, dr_1,$$

[1] Borel, *loc. cit.*, p. 53.

si

$$-|r_1|^{\rho'+2\varepsilon}.\beta = -r_1^{\rho'+2\varepsilon} + |z|_1^{\rho'+\varepsilon} r_1^{\rho'-\varepsilon},$$

ou

$$-\beta = -1 + \frac{|z|^{\rho'+\varepsilon}}{r_1^{\varepsilon}},$$

ε étant donné aussi petit qu'on veut, mais fini; β est aussi voisin de 1 qu'on veut, pourvu que r_1 soit assez grand. $J(z)$ est alors une fonction entière de z.

Soit

$$J(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_l z^l + \ldots;$$

on a

$$B_l = A_l(\rho' + 2\varepsilon) \int_0^\infty e^{-r^{\rho'+2\varepsilon}} r^{l+h} dr.$$

Posons

$$r^{\rho'+2\varepsilon} = t,$$

$$\frac{dt}{t} = (\rho' + 2\varepsilon)\frac{dr}{r},$$

on a

$$B_l = A_l \frac{(\rho' + 2\varepsilon)}{\rho' + 2\varepsilon} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon}-1} dt = A_l \Gamma\left(\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon}\right),$$

valeur qui tend vers zéro avec $\frac{1}{l}$.

Si donc l'on prend

$$\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon} = \text{un entier},$$

$$\lim A_l . \left(\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon} - 1\right)_{l=\infty}! = 0.$$

Choisissons pour h le plus petit nombre $< \rho' + 2\varepsilon$ te que

$$\frac{l+1+h}{\rho'+2\varepsilon} = \text{entier} = \lambda + 1;$$

on a

$$A_l \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e} = \eta_l \qquad \left(\lim_{l=\infty} \eta_l = 0\right),$$

et, quel que soit l,

$$(9) \qquad |A_l| \leqq \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\rho}(1+\varepsilon)},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{l}$.

Réciproquement, si

$$(10) \qquad |A_l| \leqq \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\sigma}},$$

quel que soit l, dès que l dépasse une certaine limite, on a

$$\rho \leqq \sigma + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ fini positif aussi petit qu'on veut}).$$

En effet, considérons, comme l'a fait à peu près M. Hadamard, les séries

$$(11) \qquad \sum_0^\infty \frac{x^l}{l^{\frac{l}{\sigma}}}$$

et

$$(12) \qquad e^{x^{\sigma_1}} = \sum_0^\infty \frac{x^{m\sigma_1}}{m!}, \qquad \text{avec } \sigma_1 > \sigma.$$

Posons $\lambda = m\sigma_1$. Les nombres λ diffèrent entre eux de σ_1 : prenons parmi eux celui qui est immédiatement au moins égal à l,

$$m\sigma_1 = \lambda_1 \geqq l,$$

avec

$$(m-1)\sigma_1 < l.$$

On a, pour $|x| > 1$,

$$(13) \qquad \frac{|x|^{m\sigma_1}}{m!} = \frac{|x|^{\lambda_1}}{\left(\frac{m}{e}\right)^{m+\frac{1}{2}}\delta} > \frac{|x|^{l-k}}{(l-k)^{\frac{l-k}{\sigma}}} \qquad (\delta \text{ limité}),$$

si

$$(l-k)^{\frac{l-k}{\sigma}} > \left(\frac{m}{e}\right)^{m+\frac{1}{2}}\delta.$$

Or

$$m < \frac{l}{\sigma_1} + 1.$$

Il suffira

$$(l-k)^{\frac{l-k}{\sigma}} > \left(\frac{l+\sigma_1}{e\sigma_1}\right)^{\frac{l}{\sigma_1}+\frac{3}{2}} \delta,$$

ou

$$\left(\frac{l-k}{l+\sigma_1}\right)^{\frac{l-k}{\sigma}} > (l+\sigma_1)^{\frac{3}{2}+\frac{l}{\sigma_1}-\frac{l}{\sigma}+\frac{k}{\sigma}} \frac{\delta}{(e\sigma_1)^{\frac{l}{\sigma_1}+\frac{3}{2}}}.$$

Le premier membre est de la forme

$$\left(1-\frac{k+\sigma_1}{l+\sigma_1}\right)^{\frac{l-k}{\sigma}} = \left(1-\frac{k+\sigma_1}{l+\sigma_1}\right)^{(l+\sigma_1)\frac{l-k}{l+\sigma_1}\frac{1}{\sigma}}$$

et a pour limite $e^{-\frac{k+\sigma_1}{\sigma}}$, pour $l=\infty$; le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{l}$ dès que $\sigma_1 > \sigma$, et (13) a lieu.

Donnant à k au moins σ_1 valeurs consécutives,

$$0, 1, 2, \ldots, E(\sigma_1) = k' - 1,$$

on voit qu'à chacun des termes correspondants de (11) on peut faire correspondre un même terme de $e^{x^{\sigma_1}}$ qui est plus grand. Donc

$$k' e^{x^{\sigma_1}} > \left|\sum \frac{x^l}{l^{\frac{l}{\sigma}}}\right|.$$

L'ordre de cette dernière série est $\leqq \sigma_1$; il en est de même *a fortiori* de celui de

$$F(z) = \sum_0^\infty A_l z^l.$$

Prenant $\sigma_1 = \sigma + \varepsilon$ (ε fini positif aussi petit qu'on veut), on a

$$\rho' \leqq \sigma + \varepsilon. \tag{14}$$

En résumé, si $F(z)$ a pour ordre apparent ρ,

$$(15) \qquad |A_l| = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\rho}(1+\varepsilon)},$$

d'après (9); admettons que pour une infinité de valeurs de l on ait

$$(16) \qquad |A_l| = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\tau}(1-\varepsilon)},$$

la valeur de τ correspondant aux autres coefficients étant plus petite : on a, d'après (14),

$$\rho \leqq \tau + \varepsilon_1.$$

D'après (15) et (16),

$$\frac{l}{\rho}(1+\varepsilon) \leqq \frac{l}{\tau}(1-\varepsilon),$$

$$\tau \leqq \rho + \varepsilon_3.$$

Donc il faut dans (16)

$$\tau = \rho + \varepsilon_3,$$

ε_3 fini, positif, aussi petit qu'on veut. C. Q. F. D.

III.

M. Hadamard a établi le théorème suivant [1] :

Étant donné un produit canonique $G(z)$ de facteurs primaires d'ordre ρ et un nombre positif arbitraire ε, on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a l'inégalité

$$G(z) > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

On en conclut alors que si

$$f(z) = e^{h(z)} G(z),$$

[1] Borel, *loc. cit.* p. 76.

H étant un polynome de degré d, et si M_r est la valeur maxima de $f(z)$ pour $z = r$, on a, dès que r dépasse une certaine limite,

$$M_r < e^{r^{\rho'+\varepsilon'}}$$

(ε' aussi petit qu'on veut, mais fixe), ρ' étant le plus grand des deux nombres d et ρ, c'est-à-dire l'ordre apparent.

On peut modifier le théorème de M. Hadamard en lui donnant une précision et une importance plus grandes, et en faire des applications à la détermination des racines des fonctions entières et des fonctions à point singulier essentiel. Nous l'énoncerons ainsi qu'il suit :

Théorème I [1]. — *Étant donné un produit canonique* $G(z)$ *de facteurs primaires d'ordre* ρ *et un nombre positif arbitraire* ε, *si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon* r_1 *fini* ($r_1 \geq 1$ *arbitraire*), *en tout point extérieur à ces cercles on a, pour* $|z|$ *assez grand, l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ *quelconque,* ρ *désignant alors son ordre apparent.*

Il nous suffit de suivre presque pas à pas la démonstration qui figure dans la théorie des fonctions entières de M. Borel [2].

Prenons d'abord $\rho < 1$.

Soit $G(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ une fonction entière d'ordre < 1, r_n le module de a_n; nous supposons la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$ convergente, et, à partir d'une certaine valeur de n,

$$r_n > n. \tag{1}$$

---

(1) Certaines de nos démonstrations ressemblent d'assez près à celles des *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel, et même les comprennent comme cas particuliers. Nous avons cru néanmoins souvent indispensable de sacrifier la concision à la clarté en reprenant avec détails les raisonnements de M. Borel, de façon à rendre plus attrayante la lecture de notre Mémoire.

(2) Page 76.

Notre méthode consiste à considérer non pas les points extérieurs aux couronnes C_n comprises entre deux cercles de rayon $r_{n_1} - 1$ et $r_{n_1} + 1$ et ayant l'origine pour centre, mais le cercle Γ_{n_1} de rayon $\eta \leqq 1$

Fig. 1.

décrit du point a_{n_1} comme centre et qui est compris dans cette couronne.

Prenons un point extérieur aux cercles Γ_{n_1}. On a pour ce cercle

$$|z - a_{n_1}| \geqq \eta. \tag{2}$$

Soit r le module de z, et m et n tels que

$$r_m \leqq 2r < r_{m+1}, \tag{3}$$

$$n^{\frac{1}{\sigma}} \leqq 2r < (n+1)^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{4}$$

$$r_{n+1} > (n+1)^{\frac{1}{\sigma}} > 2r \geqq r_m, \tag{5}$$

$$n \geqq m, \tag{6}$$

$$G(z) = ABC, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} A &= \prod_{1}^{m} i\left(1 - \frac{z}{a_i}\right), \\ B &= \prod_{m+1}^{n} i\left(1 - \frac{z}{a_i}\right), \\ C &= \prod_{n+1}^{\infty} i\left(1 - \frac{z}{a_i}\right), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

avec les notations de M. Borel. On a

$$A = \prod_{1}^{m} i \frac{a_i - z}{a_i};$$

d'où, en vertu de (2), (5) et (8),

$$\begin{cases} |A| > \dfrac{\eta^m}{(2r)^m}, \\ |B| > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m}, \\ |C| > \displaystyle\prod_{n+1}^{\infty} i\left(1 - \frac{r}{i^{\frac{1}{\sigma}}}\right). \end{cases}$$

Quand $a < \frac{1}{2}$, $1 - a > e^{-2a}$; donc

$$|C| > e^{-2r \sum_{n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\sigma}}}.$$

Or, si $\sigma < 1$,

$$\sum_{n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\sigma}} < \int_n^{\infty} x^{-\frac{1}{\sigma}} dx = \frac{\sigma}{1-\sigma} n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \leq \frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma-1},$$

$$|C| > e^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma}},$$

$$G(z) = |ABC| > \frac{\eta^m}{(2r)^m}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} e^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma}} > e^{-n\log 2 - m\log r - \frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma} + m\log\eta}.$$

D'après (4) et (6), $m \leq n \leq (2r)^{\sigma}$,

$$m\log r + n\log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma} - m\log\eta$$
$$< r^{\sigma}\left[2^{\sigma}\log\frac{r}{\eta} + 2^{\sigma}\log 2 + 2^{\sigma}\frac{\sigma}{1-\sigma}\right].$$

On peut prendre r assez grand, si petits que soient η et ε donnés à l'avance, pour que

$$2^{\sigma}\left(\log\frac{r}{\eta} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) < r^{\varepsilon},$$

d'où

$$|G(z)| > e^{-r^{\sigma+\varepsilon_1}}.$$

Tel est le résultat que nous voulions obtenir. Si la suite des a_n a ρ pour exposant de convergence, on peut prendre $\sigma = \rho + \varepsilon_1$ quelque petit que soit le nombre ε_1 donné à l'avance, et $|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}}$.

Ceci s'étend aux fonctions de genre quelconque fini : soient $p \geq 1$, q un entier supérieur à p et ω une racine primitive de

$$\omega^q = 1, \qquad z^q = y, \qquad r^q = R = |y|,$$
$$\Phi(y) = F(z) = G(z)G(\omega z)\ldots G(\omega^{q-1} z).$$

$\Phi(y)$ a pour ordre apparent

$$\frac{p}{q} \quad (q > p) \qquad \text{et} \qquad |\Phi(y)| > e^{-R^{\frac{p}{q}+\varepsilon_1}}$$

pour les points extérieurs aux cercles Γ_1 de rayon $\eta_1 < 1$ dans le plan des y. Si $\eta_1 < 1$ est convenablement choisi, η_1 étant suffisamment petit, aux points du plan des z extérieurs à des cercles Γ de rayon η et ayant pour centres les zéros a_n, $a_n\omega$, ..., $a_n\omega^{q-1}$ de $F(z)$ correspondent dans le plan des y des points extérieurs aux cercles Γ_1. Or

$$|G(\omega z)| < e^{r^{\sigma+\varepsilon_1}}, \qquad \ldots, \qquad |G(\omega^{q-1} z)| < e^{r^{\sigma+\varepsilon_1}}$$

pour les points extérieurs à ces cercles, en sorte que

$$|G(z)| > e^{-qr^{\sigma+\varepsilon_1}} = e^{-r^{\sigma+\varepsilon_1}}.$$

Pour une autre valeur $q > p$ de q, la même inégalité a lieu pour les points du plan des z extérieurs aux cercles Γ_2 de rayon $\eta_2 \leq 1$ et de centres a_n, $a_n\omega$, ..., $a_n\omega^{q'-1}$.

Si l'on prend pour n supérieur à une certaine limite

$$|a_n(\omega^\alpha - \omega^\beta)| > 3\eta_1,$$

quels que soient α et β $(0 < \alpha < q,\ 0 < \beta < q')$, ce qui est toujours possible si q et q' sont premiers entre eux, on voit finalement que le

théorème a lieu pour tous les points extérieurs aux cercles de rayon η et de centres a_n, les cercles Γ et Γ_2 n'ayant d'autres points communs que ceux des cercles de centre a_n.

Ceci s'étend immédiatement aux fonctions entières f quelconques d'ordre fini :

$$f(z) = G(z)e^{H(z)}$$

donne, si ρ' est l'ordre apparent,

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho'+\varepsilon}}$$

pour tous les points extérieurs aux cercles de rayon η décrits des points a_n comme centre quand n est suffisamment grand. On peut prendre η et ε aussi petits qu'on veut, pourvu que n soit supérieur à une limite convenable.

Ceci va nous permettre d'obtenir le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots$ une fonction entière de genre fini et d'ordre apparent ρ',*

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l.$$

Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de $f_l(z)$ de module inférieur à $l^{\frac{1}{\rho'+\varepsilon}}$ correspond une racine de $f(z)$, les modules des deux racines différant d'aussi peu qu'on veut, pourvu que l soit assez grand.

La démonstration se décompose en plusieurs parties :

1° Considérons d'abord les racines dont le module est suffisamment grand, $> L$, par exemple. Soit

$$f(z) = f_l(z) + \Psi_{l+1}(z).$$

Soit z_1 un zéro de $f_l(z)$. On aura

$$f(z_1) = \Psi_{l+1}(z_1).$$

Si $|z_1| < \varphi_l$,

$$|\Psi_{l+1}(z_1)| < \psi_l.$$

Si z_1 est intérieur aux cercles Γ et dépasse une certaine limite L indépendante de l, il y a un zéro ζ_1 de f qui diffère de z_1 d'aussi peu qu'on veut (plus exactement $|\zeta_1| - |z_1| \geq \eta_1$). Sinon il faudra

$$e^{-\eta_l \rho'^{\,l}} < |f(z_1)| < \frac{1}{\Psi_l}.$$

Ceci posé, on sait que, quand $r = |z|$ dépasse une certaine limite finie L, on a, pour une infinité de valeurs de l,

$$\sqrt[l]{A_l} = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1}$$

(ε_1 aussi petit qu'on veut, positif ou négatif), les autres valeurs de $\sqrt[l]{A_l}$ étant plus petites.

Prenons alors

$$|z_1|\, l^{\varpi} = \varrho_l,$$

où ϖ est une constante. On aura

$$\begin{aligned}
|\Psi_{l+1}(z_1)| &\leq |A_{l+1}|\, l^{\varpi(l+1)} + |A_{l+2}|\, l^{\varpi(l+2)} + \ldots \\
&\leq \frac{l^{\varpi(l+1)}}{(l+1)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)(l+1)}} + \frac{l^{\varpi(l+2)}}{(l+2)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)(l+2)}} + \ldots \\
&= \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\left(\varepsilon_1+\frac{1}{\rho}\right)}}\right]^{(l+1)} + \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+2)^{\left(\varepsilon_1+\frac{1}{\rho}\right)}}\right]^{(l+2)} + \ldots.
\end{aligned}$$

Prenons $\varpi = \varepsilon_1 + \frac{1}{\rho'} - \varepsilon'$, ε' étant positif et aussi petit qu'on veut, mais fini.

On a

$$\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho}}} < \frac{1}{l^{\varepsilon}},$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{l+1}(z_1)| &\leq \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho}}}\right]^{l+1} \left[1 + l^{-\varepsilon'} + l^{-2\varepsilon'} + \ldots\right] \\
&\leq \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho}}}\right]^{l+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{l^{\varepsilon}}} \\
&\leq \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}}}\right]^{l+1} \frac{l^{\varepsilon}}{l^{\varepsilon}-1} \leq 2\, l^{-\varepsilon'(l+1)}.
\end{aligned}$$

Il faut

$$e^{-l^{(\rho'-\varepsilon)\varpi}} < 2l^{-\varepsilon'(l+1)},$$

$$\varepsilon'(l+1)\log l < \log 2 + l^{(\rho'+\varepsilon)\varpi},$$

ce qui est impossible si

$$(\rho'+\varepsilon)\varpi = (\rho'+\varepsilon)\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\rho'} - \varepsilon'\right) = \rho'\varepsilon_1 + \varepsilon\varepsilon_1 + 1 + \frac{\varepsilon}{\rho'} - \varepsilon'(\rho'+\varepsilon) \geqq 1.$$

Il est toujours possible de choisir ε, puis ε_1 assez petits et finis pour que ceci ait lieu pour toute valeur positive de ε' choisie *a priori* aussi petite qu'on veut.

Il en résulte que pour une valeur donnée de $\eta \leqq 1$, dès que l dépasse une certaine limite, les racines de $f_l(z)$ de module supérieur à la limite finie L et inférieur à $l^{\frac{1}{\rho'}-\varepsilon_2}$ (ε_2 fini, positif, aussi petit qu'on veut) sont intérieures aux cercles Γ.

2° Considérons maintenant les valeurs des zéros de $f(z)$ de module inférieur à la limite L ci-dessus visée qui dépend de η. Leur nombre est limité et $\leqq \nu$ pour la fonction $f(z)$ donnée.

Si $2\eta_1$ est la limite inférieure de la distance de deux des zéros de mod $<$ L, pour tout point extérieur aux cercles de rayon $\frac{\eta_1}{2}$ décrit autour de chaque zéro comme centre, $|f(z)|$ a évidemment une limite inférieure finie F, et il faut

$$F < \psi_l,$$

si ψ_l est une limite supérieure de $|\Psi_{l+1}(z_1)|$, z_1 n'étant pas à l'intérieur d'un des cercles de rayon η_1. Or, quand η_1 est donné (η_1 étant d'ailleurs fini), on peut toujours prendre l assez grand pour que ψ_l soit aussi petit qu'on veut et, par suite, pour que l'inégalité précédente soit impossible : on peut prendre η_1 aussi petit qu'on veut, pourvu que l soit suffisamment grand.

Il résulte de ce qui précède qu'à toute racine z_1 de $f_l(z)$ correspond une racine de $f(z)$ dont le module en diffère d'aussi peu qu'on veut pour l suffisamment grand, pourvu que le module de z_1 soit $\leqq l^{\frac{1}{\rho'}-\varepsilon_2}$ (¹).

(¹) Ceci n'établit pas, toutefois, qu'à chaque racine de $f_l(z) = 0$ corresponde une et une seule racine de $f(z) = 0$.

Application. — L'équation $e^z = 0$ n'a d'autre racine que $z = -\infty$. Par suite, les racines du polynome

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^m}{m!} = 0$$

vont toutes en croissant indéfiniment avec m.

IV.

Soient

$$(1) \qquad F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$$

une fonction entière d'ordre apparent fini ρ' et d'ordre réel ρ : $\rho' \geq \rho$, et la fonction [1]

$$(2) \qquad G(z) = f(z) f(\omega z) \ldots f(\omega^{m-1} z)$$

avec $m > \rho$.

Posons

$$a_n^m = A_n, \qquad z^m = Z;$$

on aura

$$(3) \qquad G(z) = c \prod \left(1 - \frac{Z}{A_n}\right),$$

c étant une constante et le second membre étant une fonction entière de Z d'ordre < 1. Si $R_n = |A'_n|$, la série $\sum \frac{1}{R_n}$ converge, par suite aussi la série $\sum \frac{1}{A'_n}$. Les séries

$$\sum_0^\infty \frac{1}{a_n^{m+k}} \qquad (k \geq 0)$$

sont toutes convergentes. On aura

$$(4) \qquad G(z) = B_0 + B_1 Z + B_2 Z^2 + \ldots,$$

[1] ω est une racine primitive de $x^m = 1$ (m quelconque $> \rho'$). Pour ce paragraphe, *comp.* Lagl, *Nouvelles Annales*, 1900-1902.

avec

$$(5)\qquad c = B_0, \qquad B_1 = -B_0 \sum \frac{1}{A'_n}, \qquad \ldots.$$

D'autre part, considérons le produit

$$(6)\qquad \begin{cases} G(z) = & (A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m + \ldots) \\ & \times (A_0 + A_1 \omega z + \ldots + A_m \omega^m z^m + \ldots) \ldots. \end{cases}$$

On a

$$B_0 = A_0^m,$$

et B_1 ne dépendra que des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Formons le produit

$$(7)\qquad \begin{cases} G_1(z) = & (A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m) \\ & \times (A_0 + A_1 \omega z + \ldots + A_m z^m) \ldots, \end{cases}$$

déduit de $G(z)$ en supprimant dans le deuxième membre tous les termes en z de degré $> m$, et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les racines de

$$(8)\qquad A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} G_1(z) &= A_0^m \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_m}\right) \left(1 - \frac{\omega z}{\alpha_1}\right) \cdots \\ &= A_0^m \left(1 - \frac{z^m}{\alpha_1^m}\right) \cdots \\ &= C_0 + C_1 z^m + C_2 z^{2m} + \ldots. \end{aligned}$$

Les coefficients de $G_1(z)$, jusqu'à celui de z^m exclusivement, sont évidemment les mêmes que ceux de $G(z)$. Donc

$$(9)\qquad C_0 = A_0^m = B_0, \qquad C_1 = -A_0^m \sum \frac{1}{\alpha_1^m} = B_1.$$

C_1 peut se calculer à l'aide des formules connues de Newton [1] en

---

[1] *Voir*, par exemple, Niewenglowski, *Cours d'Algèbre*, t. II, 2e édition, 1891, p. 254.

partant de l'équation (8). Si, dès lors, on pose

$$(10)\quad \begin{cases} A_0 s_1 + A_1 = 0, \\ A_0 s_2' + A_1 s_1' + 2A_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 s_m' + A_1 s_{m-1}' + \dots + m A_m = 0, \end{cases}$$

on aura

$$s_m' = -\frac{C_1}{A_0^m} = -\frac{B_1}{A_0^m},$$

ce qui donnera B_1 en fonction de $A_0, A_1, \dots, A_m$. Ceci s'applique pour toute valeur de $m > \rho'$; les mêmes formules (10) serviront à calculer les sommes

$$\sum_0^\infty \frac{1}{A_n'} = \sum_0^\infty \frac{1}{a_n^m} = -\frac{B_1}{B_0} = -\frac{B_1}{A_0^m} = s_m'$$

pour toute valeur de $m > \rho'$.

On remarque en même temps que la somme des inverses des puissances $m_1^{\text{ièmes}}$ des racines de $F(z)$ est égale à la somme des inverses des puissances $m_1^{\text{ièmes}}$ des racines de $F_m(z)$ ou de (8), quel que soit m dès que $m \geq m_1 > \rho'$. D'où ce théorème :

Théorème III. — *Pour une fonction entière* $F(z)$ *d'ordre apparent* ρ' *fini, les sommes des inverses des puissances entières* $m > \rho'$ *des racines se calculent comme pour un polynome par les formules de récurrence de Newton.*

Si $F_m(z)$ *désigne le polynome formé des termes de* $F(z)$ *de degré* $\leq m$, *la somme des inverses des puissances* $m_1^{\text{ièmes}}$ *des racines de* $F_m(z)$ *et* $F(z)$ *sont égales quand* $m \geq m_1 > \rho'$.

On déduit de là un certain nombre d'applications.

I. *Conditions de réalité des racines de* $F(z) = 0$. — Les équations qui donnent $s_m (m > \rho')$ permettent de préciser certaines conditions de réalité des racines de $F(z) = 0$.

Pour que toutes les racines soient réelles, il faudra que

$$s_{2v} = s_{2v}' (2v > \rho')$$

soit > 0.

Soit $\rho' < 2$; on peut prendre $\nu = 1, 2, \ldots$. En particulier,

$$s_2 = s'_2 = + \frac{A_1^2}{A_0^2} - \frac{2A_2}{A_0} = - \frac{2A_2A_0 - A_1^2}{A_0^2} > 0$$

ou

$$2A_2A_0 - A_1^2 < 0.$$

Utilisant ce théorème connu :

Si une fonction entière d'ordre apparent < 2 a toutes ses racines réelles, il en est de même de toutes ses dérivées, nous obtenons la condition générale connue (¹)

$$(n+1)A_{n+1}A_{n-1} - nA_n^2 < 0.$$

En faisant varier ν, on obtient une infinité de conditions de réalité pour toute fonction entière d'ordre fini. Ainsi, pour les fonctions d'ordre apparent < 2, on obtient les conditions

$$s_2 > 0, \qquad s_4 > 0, \qquad s_6 > 0, \qquad \ldots.$$

II. *Conditions pour que toutes les racines soient positives ou négatives.* — Il faudra non seulement $s_{2\nu} > 0$ comme ci-dessus, mais encore $s_{2\nu+1} > 0$, dès que $2\nu + 1 > \rho'$ pour que les racines soient toutes positives.

Pour les fonctions d'ordre apparent < 1, il faudra $s_1 = s'_1 > 0$, c'est-à-dire

$$A_0A_1 < 0.$$

Les dérivées devant satisfaire aux mêmes conditions (²), il faudra,

---

(¹) Borel, *loc. cit.*, p. 35.

(²) En effet,

$$F(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum \frac{1}{z - a_n};$$

si a_0 est la plus petite racine, qui est positive, pour $z < a_0$ $\frac{F'}{F}$ est toujours négatif, F est toujours positif. Donc $F'(z)$ est toujours négatif et ne peut s'annuler, sauf pour $z = -\infty$.

plus généralement,

$$A_n A_{n+1} < 0 :$$

l'équation $F(z) = 0$ *ne doit présenter que des variations.*

On déduit de là, par le changement de z en $-z$:

Pour que l'équation $F(z) = 0$ *d'ordre apparent* < 1 *ait toutes ses racines négatives, il faut que* $F(z)$ *ne présente que des permanences.*

III. *Détermination du facteur exponentiel de* $F(z)$. — On peut rattacher à ce qui précède une remarque intéressante relative à la détermination du facteur exponentiel de

$$F(z) = e^{G(z)} \Pi(z),$$

Π étant un produit de facteurs primaires. On a

$$G(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_d z^d;$$

Π est le produit des facteurs primaires

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^k}{ka_n^k}}.$$

Nous prendrons $k < d \leqq \rho'$, certains des coefficients $\alpha_d, \alpha_{d-1}, \ldots$ pouvant être nuls.

Si l'ordre apparent ρ' n'est pas entier, il est égal à l'ordre réel ρ : on a

$$d < \rho', \qquad k = E(\rho') < \rho'.$$

Si l'ordre apparent ρ' est entier, il est égal au plus grand des deux nombres k ou $k+1$ et δ, α_δ étant le premier des coefficients α_d, $\alpha_{d-1}, \ldots$ qui ne s'annule pas : l'ordre réel ρ est $\leqq \rho'$.

Ceci posé, on a, pour $|z|$ très petit,

$$\log F(z) = G(z) + \sum \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^k}{ka_n^k}\right]$$

$$= G(z) - \sum \left[\frac{z^{k+1}}{(k+1)a_n^{k+1}} + \ldots\right].$$

$$F(z) = e^{G(z) + \sum \left[\frac{z^{k+1}}{(k+1)a_n^{k+1}} + \ldots\right]}.$$

Les séries $\frac{1}{k+1}\sum\frac{1}{a_n^{k+1}}$, $\frac{1}{k+2}\sum\frac{1}{a_n^{k+2}}$, ... étant convergentes, en égalant dans les deux membres les $k+1$ premiers coefficients, on obtient $k+1$ équations permettant de déterminer $k+1$ coefficients de $G(z)$.

On a

$$\begin{aligned}\log F(z) &= G(z) - \frac{z^{k+1}}{k+1}\sum\frac{1}{a_n^{k+1}} - \frac{z^{k+2}}{k+2}\sum\frac{1}{a_n^{k+2}} - \ldots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_k z^k + \left(\alpha_{k+1} - \frac{s_{k+1}}{k+1}\right) z^{k+1} + \ldots \\ &\quad + \left(\alpha_d - \frac{s_d}{d}\right) z^d - \frac{s_{d+1}}{d+1} z^{d+1} - \ldots.\end{aligned}$$

La somme s_{d+i} $(i > 0)$ est donc, au facteur $d+i$ près, le coefficient de z^{d+i} dans le développement de $\log F(z)$. Ces quantités sont données par les formules de récurrence de Newton (10).

Quant aux quantités $s'_1, s'_2, \ldots, s'_d$ données par ces mêmes formules (10), on peut en donner une interprétation élégante. Cherchons d'une autre manière les coefficients des d premières puissances de z dans le développement de $\varphi = \log F(z)$. On a, par des dérivations successives

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi' F - F' = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &(\varphi' F)^{(m)} - F^{(m+1)}\\ &\quad = \varphi^{(m+1)} F + C_m^1 \varphi^{(m)} F' + C_m^2 \varphi^{(m-1)} F'' + \ldots + \varphi' F^{(m)} - F^{(m+1)} = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour $z = 0$, on obtient les formules de récurrence

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi'_0 F_0 - F'_0 = \varphi'_0 A_0 - A_1 = 0,\\ &\varphi''_0 A_0 + \varphi'_0 A_1 - 2A_2 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\varphi_0^{(m+1)} A_0 + C_m^1 \varphi_0^{(m)} A_1 + C_m^2 \varphi_0^{(m-1)} 2!A_2 + \ldots\\ &\qquad\qquad + \varphi'_0 m! A_m - (m+1)! A_{m+1} = 0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs

$$\varphi = \log F(z) = \varphi_0 + \frac{z}{1}\varphi'_0 + \ldots + \frac{\varphi_0^m z^m}{m!} + \ldots.$$

Si l'on pose

$$\frac{\sigma_0^m}{m!} = -\frac{\sigma_m}{m},$$

les formules de récurrence ci-dessus deviendront

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma_1 A_0 + A_1 = 0, \\
\sigma_2 A_0 + \sigma_1 A_1 + 2A_2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
m!\sigma_{m+1} A_0 + C_m^1 A_1 (m-1)!\sigma_m + C_m^2 2! A_2 (m-2)!\sigma_{m-1} + \dots \\
\quad + C_m^i i! A_i \sigma_{m-i+1}(m-i)! + \dots + \sigma_1 m! A_m + (m+1)! A_{m+1} = 0,
\end{array}\right.$$

c'est-à-dire, après réductions,

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma_1 A_0 + A_1 = 0, \\
\sigma_2 A_0 + \sigma_1 A_1 + 2A_2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\sigma_{m+1} A_0 + \sigma_m A_1 + \sigma_{m-1} A_2 + \dots \\
\quad + \sigma_{m-i+1} A_i + \dots + \sigma_1 A_m + (m+1) A_{m+1} = 0.
\end{array}\right.$$

Si l'on compare ces formules avec les formules (10), on voit que les quantités σ_i coïncident avec les quantités s'_i données par (10). Donc

$$\varphi = \log F(z) = \log A_0 - \frac{z}{1} s'_1 - \dots - \frac{z^m}{m} s'_m - \dots$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{array}{llll}
\alpha_0 = \log A_0, & \alpha_1 = -s'_1, & \dots, & \alpha_k = -s'_k, \\
\alpha_{k+1} - \dfrac{s_{k+1}}{k+1} = -\dfrac{s'_{k+1}}{k+1}, & & \dots, & \alpha_d - \dfrac{s_d}{d} = -\dfrac{s'_d}{d}, \\
s_{d+1} = s'_{d+1}, & \dots, & s_{d+i} = s'_{d+i}, & \dots.
\end{array}\right.$$

Ceci constitue une nouvelle démonstration de l'exactitude des formules (10) pour le calcul de $s_{d+1}, \dots, s_{d+i}, \dots$. Mais ceci montre de plus que les formules (10) donnent $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Dans le cas particulier où $k = d$, le facteur exponentiel de $F(z)$ est

complètement déterminé. Ceci a toujours lieu quand l'ordre apparent ρ' n'est pas entier [1].

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit la fonction entière d'ordre fini*

$$F(z) = \sum_0^\infty A_l z^l$$

mise sous la forme

$$e^{G(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^k}{ka_n^k}}$$

où $G(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_d z^d$ *est un polynome de degré* d, Π *un produit convergent de facteurs primaires*, k *le plus petit nombre entier tel que la série*

$$\sum \frac{1}{a_n^{k+1}}$$

converge.

Les formules de Newton

$$\begin{cases} A_0 s'_1 + A_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_0 s'_m + A_1 s'_{m-1} + \ldots + m A_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

donnent :

1° *Les valeurs*

$$\alpha_1 = -s'_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_k = -s'_k$$

des k *coefficients de* $G(z)$ *qui suivent* $\alpha_0 = \log A_0$;

2° *Les valeurs*

$$s_{d+1} = s'_{d+1}, \qquad \ldots, \qquad s_{d+i} = s'_{d+i}, \qquad \ldots$$

des sommes des puissances $(d+1)^{\text{ièmes}}, \ldots, (d+i)^{\text{ièmes}}, \ldots$ *des inverses des racines de* $F(z)$:

---

[1] Une fonction à croissance irrégulière ne peut avoir son ordre réel plus petit que son ordre apparent.

3° *Les valeurs des quantités*

$$(k+1)\alpha_{k+1} - s_{k+1} = -s'_{k+1}, \qquad \ldots, \qquad d\alpha_d - s_d = -s'_d,$$

$s_{k+1}, \ldots, s_d$ *étant les sommes des puissances* $(k+1)^{\text{ièmes}}, \ldots, d^{\text{ièmes}}$ *des inverses des racines de* $F(z)$.

On obtient ainsi la valeur complète de $G(z)$ *quand l'ordre apparent n'est pas entier.*

IV. *Propriété d'invariance de certaines fonctions des coefficients de* $F(z)$. — D'après ce qui précède, pour les fonctions d'ordre fini ρ', s_i peut se calculer par les formules de Newton (10) dès que $i > \rho'$.

Soit $G(z)$ un polynome de degré d quelconque; $e^{G(z)}F(z)$ est d'ordre d ou ρ', et

$$e^{G(z)}F(z) = \sum_0 A_i z^i.$$

On a, pour $i > d$, $i > \rho'$,

$$s_i = \psi_i(A_0, A_1, \ldots) = \psi_i(A'_0, A'_1, \ldots),$$

la deuxième fonction se déduisant de la première par la substitution de $A'_0, A'_1, \ldots$ à $A_0, A_1, \ldots$. La fonction ψ_i conservant la même valeur, quel que soit le polynome $G(z)$ de degré d, est un invariant absolu dans toutes les transformations correspondantes.

On peut le vérifier directement dans les cas les plus simples. Nous citerons à titre d'exemple $e^{az^2+bz+c}F(z)$, où $F(z)$ est d'ordre < 3. On peut d'abord supposer $c = 0$ et $A_0 = 1$, les formules (10) restant les mêmes. Le calcul direct montre que

$$s_3 = 3A_1A_2 - A_1^3 - 3A_3 = 3A'_1A'_2 - A'^3_1 - 3A'_3.$$

V. *Théorème de M. Picard.* — Supposons que $F(z) = 0$ n'ait, $A_1, A_2, \ldots$ étant donnés, aucune racine : on peut montrer, d'après ce qui précède, que A_0 n'a qu'un nombre limité de valeurs.

En effet, on a, pour $m > \rho'$, d'après (10),

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & A_0 & A_1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & A_0 & A_1 & 2A_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0 & A_1 & \dots & \dots & \dots & (m-1) & A_{m-1} \\ A_{1+i} & A_{2+i} & \dots & \dots & \dots & (m+i) & A_{m+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de A_0 (qui est A_0^{m-1}) est $\pm (m+i) A_{m+i}$: il n'est pas nul en général; par conséquent, A_1, A_2, ... étant donnés, il y a au plus un nombre fini de valeurs possibles pour A_0, en général au plus m.

C'est une partie d'un théorème connu de M. Picard.

VI. *Fonctions entières simples.* — MM. Cesàro, Vivanti et Bassi ont étudié [1] d'une manière particulière les fonctions entières *simples*, c'est-à-dire privées de facteur exponentiel. Il peut donc être intéressant de signaler en passant à quels critères on reconnaîtra les fonctions de cette nature.

D'après le théorème IV, remarquant qu'ici les coefficients de $G(z)$ $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont nuls, on aura, par les formules de récurrence de Newton, $A_1 = A_2 = \dots = A_k = 0$.

Cette condition est nécessaire et suffisante.

Théorème V. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière* $F(z)$ *d'ordre fini soit simple est que*

$$F(z) = A_0 + A_{k+1} z^{k+1} + A_{k+2} z^{k+2} + \dots,$$

k étant le plus petit nombre entier tel que

$$\sum \frac{1}{a_n^{k+1}}$$

converge.

Si l'ordre apparent ρ' de $F(z)$ *n'est pas entier,* $k = E(\rho')$.

---

[1] Borel, *loc. cit.*, p. 47.

Remarque. — D'après les théorèmes IV et V, on peut toujours déterminer le facteur exponentiel d'une fonction entière d'ordre fini non entier et, par suite, la fonction entière simple qui a les mêmes racines. Ceci pourra, dans certains cas, faciliter l'étude des racines de la fonction entière proposée.

DEUXIÈME PARTIE.

V. — Fonctions quasi entières.

Considérons la fonction de la forme

$$(1) \qquad \Phi(z) = e^{H(z)+K\left(\frac{1}{z}\right)} f(z)\, \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$H(z)$ et $K(z)$ étant des polynomes de degrés h et k, $f(z)$ et $\varphi(z)$ des produits de facteurs primaires d'ordres finis ρ et ρ_1 respectivement. Cette fonction $\Phi(z)$ n'a en général d'autres points critiques à distance finie qu'un point singulier essentiel à l'origine; elle a un point essentiel à l'infini : comme cas particulier, $f(z)$ et $\varphi(z)$ pourront se réduire l'un ou l'autre ou tous deux à un ou des polynomes.

Si ρ' est le plus grand des deux nombres h et ρ, ρ'_1 le plus grand des nombres k et ρ_1, nous dirons que $\Phi(z)$ est d'ordres réels (ρ, ρ_1), et d'ordres apparents (ρ', ρ'_1).

$\Phi(z)$ est développable d'après la série de Laurent sous la forme

$$(2) \qquad \Phi(z) = \ldots + B_l z^{-l} + \ldots + B_1 z^{-1} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots.$$

Pour une valeur assez grande de z $\left(\text{ou de } \frac{1}{z}\right)$ de module r, $|\Phi| \leq e^{r^{\rho'+\varepsilon}}$ $\left(\text{ou } \leq e^{r^{\rho'_1+\varepsilon}}\right)$ d'après (1). D'après (2), $|\Phi| \geq e^{r^{\rho'-\varepsilon}}$ $\left(\text{ou } \geq e^{r^{\rho'_1-\varepsilon}}\right)$, si ρ' et ρ'_1 sont les ordres des fonctions entières

$$(3) \qquad \begin{cases} A(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots, \\ B(z) = \qquad B_1 z + \ldots + B_l z^l + \ldots \end{cases}$$

D'ailleurs, ces inégalités sont vraies pour ε_1, ε'_1 positifs : elles ne le sont plus pour une infinité de valeurs de r quand une de ces valeurs est négative. On en conclut

$$(4) \qquad \rho' = \rho'', \qquad \rho'_1 = \rho''_1.$$

Inversement, considérons une fonction $\Phi(z)$ de la forme (2), où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières d'ordres finis, ρ', ρ'_1.

Soient $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ les zéros de $\Phi(z)$ de module < 1; $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ les zéros de $\Phi(z)$ de module $\geqq 1$, rangés, les premiers par ordre de grandeur décroissante, les seconds par ordre de grandeur croissante.

On sait [1] que l'on peut former un produit $\Pi\left(\frac{1}{z}\right)$ ayant pour facteurs primaires

$$P_\nu = \left(1 - \frac{b_\nu}{z}\right) e^{\frac{b_\nu}{z} + \frac{1}{2}\frac{b_\nu^2}{z} + \ldots + \frac{1}{p_\nu - 1}\frac{b^{p_\nu - 1}}{z^{p_\nu - 1}}},$$

p_ν étant fini ou non, et tel que

$$\Pi\left(\frac{1}{z}\right) = P_1 P_2 \ldots P_\nu \ldots$$

converge.

De même, en posant

$$Q_\nu = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\nu} + \ldots + \frac{1}{p'_\nu - 1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p'_\nu - 1}},$$

$$\Pi_1(z) = Q_1 Q_2 \ldots Q_\nu \ldots$$

sera convergent [2].

---

[1] *Voir*, par exemple, Borel, *loc. cit.*, p. 9 et suivantes, ou Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 144.

La formule $\Phi = \Pi(z)\Pi_1\left(\frac{1}{z}\right)e^{\Phi_2}$ reste évidemment vraie quand A et B sont d'ordres infinis.

[2] Il suffira de donner à p_ν une valeur égale au genre de la fonction entière la plus simple ayant pour zéro les quantités $\frac{1}{b_\nu}$, c'est-à-dire égale au plus petit entier contenu dans l'exposant de convergence ρ de la suite $\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_\nu}, \ldots$. Si ρ est entier, ce sera ρ ou $\rho - 1$.

$H\left(\frac{1}{z}\right) H_1(z)$ a les mêmes zéros que Φ.

Alors $\frac{H.H_1}{\Phi}$ n'a plus de zéros, sauf peut-être aux points o et ∞ :

$$\log \frac{\Phi}{H.H_1} = \Phi_1,$$

$$\Phi = HH_1 e^{\Phi_1}.$$

Φ_1 n'ayant d'autres points critiques que les points o et ∞. Soient

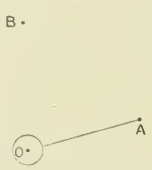
$$\Phi_1 = \log \Psi_1,$$

$$\Psi_1 = \rho e^{i\psi},$$

$$\Phi_1 = \log \rho + i(\psi + 2k\pi).$$

Considérons un chemin quelconque environnant l'origine dans le plan des z, chemin issu d'un point A et aboutissant à un point B. Si

Fig. 2.



l'on suit ce chemin en partant de A avec la valeur $\log \rho + i\psi$ de Φ_1 pour aboutir en B, on obtiendra en ce point la même valeur qu'en suivant un certain nombre de lacets identiques issus de A et environnant l'origine, puis la droite AB. Supposons qu'après avoir décrit le lacet la valeur de $\log \rho + i\psi$ devienne $\log \rho + i(\psi + 2\lambda\pi)$, λ étant évidemment entier. La fonction

$$\Psi_1 z^{-\lambda} = X_1$$

est telle que

$$\log X_1 = \log \rho + i\psi - \lambda \log z$$

ne change pas de valeur quand on suit un, par suite un nombre quelconque de lacets issus de A. Autrement dit, $\log X_1$ est *monodrome dans tout le plan*. C'est une fonction à laquelle on peut appliquer la

formule de Laurent, et qui est de la forme

$$\log X_1 = \Phi_2 = \ldots + B'_l z^{-l} + \ldots + B'_1 z^{-1} + A'_0 + \ldots + A'_l z^l + \ldots.$$

On en conclut

$$\Phi = \Pi\left(\frac{1}{z}\right) \Pi_1(z) e^{\Phi_1} = \Pi\Pi_1 z^\lambda e^{\Phi_2},$$

Φ_2 étant de la même forme que Φ. Soient

$$B_1(z) = \qquad B'_1 z + \ldots + B'_l z^l + \ldots,$$
$$A_1(z) = A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_l z^l + \ldots.$$

Ici $\Pi(z)$, $\Pi_1(z)$, $B_1(z)$, $A_1(z)$ sont des fonctions entières; il en est de même de [1]

$$z^\lambda \Pi_1(z) e^{A_1(z)}, \qquad \Pi(z) e^{B_1(z)}.$$

Or nous savons que, pour les grandes valeurs de z,

$$|\Phi(z)| \leqq e^{r^{\rho'+\varepsilon}}.$$

Pour ces grandes valeurs,

$$\Pi\left(\frac{1}{z}\right) e^{B_1\left(\frac{1}{z}\right)} = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots$$

est très voisin de $\frac{C_\mu}{z^\mu}$, si C_μ est le premier des coefficients du second membre qui ne s'annule pas. Donc, pour les grandes valeurs de z,

$$|z^\lambda \Pi_1(z) e^{A_1(z)}| = e^{r^{\rho'+\varepsilon_1}},$$

c'est-à-dire que $z^\lambda \Pi_1 e^{A_1}$ est une fonction entière d'ordre fini $\leqq \rho'$.

Il y a d'ailleurs une infinité de valeurs de z telles que

$$|\Phi(z)| \geqq e^{r^{\rho'-\varepsilon}},$$

par suite telles que

$$|z^\lambda \Pi_1(z) e^{A_1(z)}| \geqq e^{r^{\rho'-\varepsilon_1}}.$$

---

[1] Ceci suppose λ positif; si λ était négatif, on considérerait

$$\Pi_1 e^{A_1} \quad \text{et} \quad z^{-\lambda} \Pi(z) e^{B_1(z)}.$$

Donc $z^2 H_1 e^{A_1}$ est une fonction entière d'ordre ρ'. De même, $H(z)e^{H_1(z)}$ est d'ordre ρ_1.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème I. — *Toute fonction*

$$\Phi(z) = M(z)N\left(\frac{1}{z}\right),$$

où $M(z)$ *et* $N(z)$ *sont des fonctions entières d'ordres apparents finis* ρ *et* ρ_1, *est de la forme*

$$\Phi(z) = B\left(\frac{1}{z}\right) + A(z),$$

où $B(z)$ *et* $A(z)$ *sont des fonctions entières d'ordres apparents finis* ρ_1 *et* ρ; *réciproquement, toute fonction de la seconde forme est aussi de la première.*

A cause de ces analogies des propriétés de $\Phi(z)$ avec celles des fonctions entières et des autres analogies que nous trouverons plus loin, nous dirons que $\Phi(z)$ est une *fonction quasi entière d'ordres finis* ρ, ρ_1 *à deux points critiques essentiels* 0 *et* ∞.

On peut étendre à la fonction $\Phi(z)$ le théorème I du § III :

Théorème II. — *Étant donné la fonction* $\Phi(z)$ *quasi entière d'ordres finis* ρ, ρ_1 *et un nombre positif arbitraire* ε, *si l'on décrit autour de chaque zéro d'ordre assez grand (assez petit et de* mod < 1) *un cercle de rayon* $r_1 < 1$ *arbitraire* ($2r_1 b_n^2$), *en tout point extérieur à ces cercles* Γ *on a, pour* $|z|$ *assez grand (assez petit),*

$$|\Phi(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad [\Phi(z) > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}}].$$

En effet, soit

$$\Phi(z) = M(z)N\left(\frac{1}{z}\right).$$

Pour des valeurs de z assez grandes, on aura, comme tout à l'heure,

$$\left|N\left(\frac{1}{z}\right)\right| \geq \frac{2C_\mu}{r^\mu} \qquad (r = |z|).$$

D'autre part,

$$|M(z)| \geq e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

pour tous les points extérieurs aux cercles de rayon $\eta < 1$ décrits des a_n comme centres. Donc

$$\left| M(z) N\left(\frac{1}{z}\right) \right| \geqq e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \frac{2 C_\mu}{r^\mu} \geqq e^{-r^{\rho+2\varepsilon}}.$$

De la même manière, on aura, dès que $|z| \leqq \frac{1}{r}$,

$$\left| N\left(\frac{1}{z}\right) \right| \geqq e^{-r^{\rho_1+\varepsilon_1}}$$

pour tous les points z extérieurs aux courbes de rayons tels que

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{b_n} \right| \leqq \eta \qquad (\eta < 1).$$

On vérifie facilement que ces courbes sont des cercles intérieurs aux cercles de rayon $2\eta b_n^2$ (¹) décrits des points b_n comme centre.

(¹) Considérons la transformation $\zeta = \frac{1}{z}$ et les points extérieurs aux cercles C_n de rayon η et de centre $\frac{1}{b_n} = \beta_n$ dans le plan des ζ. Si $\zeta = \xi + \eta i$, ces points sont ceux pour lesquels

$$|\zeta - \beta_n| > \eta.$$

A ces points correspondent dans le plan des z les points tels que

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{b_n} \right| > \eta.$$

Pour étudier ces points, rien n'empêche de supposer b_n réel. Il faut trouver les points tels que

$$|b_n - z| > \eta |b_n z|$$

ou

$$(\alpha) \qquad (b_n - x)^2 + y^2 > \eta^2 b_n^2 (x^2 + y^2).$$

Considérons le cercle

$$b_n^2 - 2 b_n x + (x^2 + y^2)(1 - \eta^2 b_n^2) = 0.$$

Son centre est sur l'axe Ox; $\eta^2 b_n^2$ est < 1 si b_n^2 est petit et $\eta^2 < 1$. Les points pour lesquels (α) a lieu sont les points extérieurs au cercle. Ce cercle coupe

Nous étendrons de la même manière à $\Phi(z)$ le théorème II du § III :

THÉORÈME III. — *Soit la fonction quasi entière*

$$\Phi(z) = \ldots + B_l z^{-l} + \ldots + B_1 z^{-1} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$$

considérée au théorème précédent. Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de

$$\Phi_l(z) = B_l z^{-l} + \ldots + B_1 z^{-1} + A_0 + \ldots + A_l z^l = 0$$

de module inférieur à $l^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2}$ $\left(\text{supérieur à } l^{-\left(\frac{1}{\rho_1}-\varepsilon_1'\right)}\right)$ (ε_2, ε_2' finis positifs, aussi petits qu'on veut) correspond une racine de $\Phi(z)$, les modules des deux racines correspondantes différant d'aussi peu qu'on veut.

Considérons les racines de

$$\Phi_l(z) = 0$$

de modules $> L$ (L fini convenablement choisi). On a, pour une infinité de valeurs de l et l_1,

$$\sqrt[l]{A_l} = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \qquad \sqrt[l_1]{B_{l_1}} = \left(\frac{1}{l_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon_1},$$

---

l'axe Ox en deux points tels que

$$b_n^2 - 2b_n x + x^2(1 - r_1^2 b_n^2) = 0,$$

$$x = \frac{b_n \pm \sqrt{b_n^2 - (1 - r_1^2 b_n^2) b_n^2}}{(1 - r_1^2 b_n^2)},$$

$$x = \frac{b_n}{1 - r_1^2 b_n^2}\left(1 \pm \sqrt{r_1^2 b_n^2}\right) = \frac{b_n}{1 - r_1^2 b_n^2}(1 \pm r_1 b_n),$$

$$x = b_n(1 \pm r_1 b_n)^{-1}.$$

Son centre est encore $\frac{b_n}{1 - r_1^2 b_n^2}$, son rayon est $\frac{r_1 b_n^2}{1 - r_1^2 b_n^2}$. On voit de suite que, si $r_1 b_n^2$ est inférieur à une limite finie, ce cercle a tous ses points intérieurs au cercle de centre b_n et de rayon $2r_1 b_n^2$, car

$$\frac{|b_n|}{1 + r_1 b_n} > |b_n| - k r_1 b_n^2, \qquad \frac{|b_n|}{1 - r_1 b_n} < |b_n| + k r_1 b_n^2,$$

dès que $k > 2$.

les autres valeurs de $A_{l'}$ et B_{l_1} étant respectivement plus petites que ne l'indiquent ces formules.

Prenons alors

$$|z_1| \leqq l^{\varpi},$$

z_1 étant un zéro de $\Phi_l(z)$ de module $> L$, et ϖ convenablement choisi.

On aura

$$\Phi(z_1) = \Phi_l(z_1) + \Psi_{l+1}(z_1) = \Psi_{l+1}(z_1),$$

si

$$\Phi(z) = \Phi_l(z) + \Psi_{l+1}(z),$$

et $\Psi_{l+1}(z_1)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{l}$; en effet,

$$\begin{aligned}|A_{l+1} z_1^{l+1} + \ldots| &\leqq A_{l+1} l^{\varpi(l+1)} + A_{l+2} l^{\varpi(l+2)} + \ldots \\ &\leqq \frac{l^{\varpi(l+1)}}{(l+1)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)(l+1)}} + \frac{l^{\varpi(l+2)}}{(l+2)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)(l+2)}} + \ldots \\ &= \left(\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}\right)^{l+1} + \left(\frac{l^{\varpi}}{(l+2)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}\right)^{l+2} + \ldots.\end{aligned}$$

Prenons

$$\varpi = \varepsilon + \frac{1}{\rho} - \varepsilon',$$

ε' étant positif, aussi petit qu'on veut, mais fini. On aura, comme dans la démonstration du théorème II du § III,

$$|A_{l+1} z_1^{l+1} + \ldots| \leqq 2 l^{-\varepsilon'(l+1)}.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{B_{l+1}}{z_1^{l+1}} + \frac{B_{l+2}}{z_1^{l+2}} + \ldots\right| \leqq \frac{2}{(l+1)^{\left(\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon_1\right)(l+1)}},$$

puisque $|z_1| > L$. Donc, ρ_1 étant fini,

$$|\Psi_{l+1}(z_1)| \leqq 3 l^{-\varepsilon'(l+1)}.$$

Mais, à l'extérieur des cercles de rayon η, pour $|z_1| > L$,

$$|\Phi(z_1)| \geqq e^{-r_1^{\rho+\varepsilon''}}, \qquad r_1 = |z_1|.$$

Si z_1 est extérieur à ces cercles, il faut

$$3l^{-\varepsilon' l+0} \geqq e^{-l^{\rho-\varepsilon''}},$$

$$\log 3 + l^{\rho-\varepsilon''} \geqq \varepsilon'(l+1)\log l,$$

ce qui est impossible dès que

$$(\rho+\varepsilon')\left(\varepsilon+\frac{1}{\rho}-\varepsilon'\right) \leqq 1.$$

ε' étant ici choisi arbitrairement, il est toujours possible de prendre ε'', puis ε, assez petits pour que cette inégalité ait lieu, L étant alors assez grand, mais ne dépendant pas de l.

On en conclut que z_1 est intérieur aux cercles de rayon η.

La considération de l'équation $\Phi_l\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ conduira à des résultats analogues pour les racines de module inférieur à $\frac{1}{L}$, mais supérieur à $l^{-\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon''\right)}$.

Il nous reste à considérer les valeurs des zéros de $\Phi(z)$ dont le module est compris entre L et $\frac{1}{L}$: le raisonnement est le même qu'au théorème II du § III. C. Q. F. D.

VI.

Les fonctions quasi entières considérées jusqu'ici n'ont que deux points singuliers essentiels, l'un à l'origine, l'autre à ∞ dans le plan des z.

On peut considérer des fonctions analogues plus générales et jouissant de propriétés semblables.

Définition. — *Soit la fonction*

$$\psi_0\left(\frac{1}{z-a}\right) + \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + \psi_{k+1}(z),$$

où $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, ..., $\psi_k(z)$, $\psi_{k+1}(z)$ *sont des fonctions entières,*

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ étant des nombres finis distincts en nombre fini : nous dirons que cette fonction est une fonction quasi entière à $k+2$ points singuliers essentiels.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant qui généralise le théorème de Laurent :

THÉORÈME I. — *Si une fonction monodrome $f(z)$ n'a, dans le plan, d'autres points critiques que les points ∞, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ (k fini), elle est développable en une série de la forme*

$$f(z) = \psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + \psi_{k+1}(z),$$

où $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{k+1}(z)$ sont des fonctions entières.

Il suffira d'employer un raisonnement analogue au raisonnement classique ([1]) par lequel on établit la série de Laurent.

Considérons dans le plan des z des cercles $c_0, c_1, \ldots, c_k$ de petits rayons ayant pour centres les points $a_0, a_1, \ldots, a_k$, un cercle γ de petit rayon ayant pour centre un point quelconque extérieur à ces cercles, un cercle A de rayon R aussi grand que l'on veut ([2]), ayant pour centre l'origine et comprenant tous les cercles précédents dont les rayons sont assez petits pour que ces cercles ne se coupent pas. On a

$$\int_A \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int_{c_0} + \ldots + \int_{c_k} + \int_\gamma.$$

Le long de A :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z} + \ldots\right),$$

car $\left|\frac{t}{z}\right| < 1$.

([1]) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Comp.* JORDAN, *Cours d'Analyse imprimé*, t. II, 1883, p. 319.

([2]) Le théorème reste vrai à l'intérieur de A quand on suppose R fini, la fonction pouvant ne pas être monodrome à l'extérieur de ce cercle. Mais alors $\psi_i(z)$ n'est plus forcément une fonction entière.

Le long de c_i :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{t-a_i}\,\frac{1}{\dfrac{z-a_i}{t-a_i}-1} = -\frac{1}{t-a_i}\left(1+\frac{z-a_i}{t-a_i}+\ldots\right),$$

car on y a

$$\left|\frac{z-a_i}{t-a_i}\right| < 1.$$

Dès lors

$$\int_\gamma = 2\pi i f(t),$$

$$\int_A = \int_A \frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{t}{t}\int_A \frac{f(z)\,dz}{z^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{c_i} = -\frac{1}{t-a_i}\int_{c_i} f(z)\,dz - \frac{1}{(t-a_i)^2}\int_{c_i} f(z)(z-a_i)\,dz - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On vérifiera sans peine la convergence de ces séries : ainsi, pour $\int_{c_i}$, le reste est

$$R = \int_{c_i} \frac{f(z)(z-a_i)^{n+1}}{(t-a_i)^{n+1}(z-t)}\,dz.$$

Soit M le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle c_i, $|z-a_i| = \sigma_i =$ rayon du cercle c_i, $t-a_i = \tau > \sigma_i$, $|t-z| \geq \tau - \sigma_i$. On a

$$|R| \leq \frac{M\sigma_i^{n+1}}{\tau^{n+1}(\tau-\sigma_i)}\,2\pi\sigma_i,$$

qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

On obtient ainsi l'expression de $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + \psi_{k+1}(z),$$

pour tous les points t du plan intérieurs à A, mais extérieurs aux cercles $c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Le rayon de convergence de chacune des séries $\psi_0(z), \ldots, \psi_k(z)$, $\psi_{k+1}(z)$ est alors aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire que ce sont des fonctions entières. C. Q. F. D.

Ceci posé, considérons les fonctions de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi(z) = e^{\Pi(z)+\Pi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)+\ldots+\Pi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)} f(z) f_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\cdots f_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \\ \qquad = \varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\cdots\varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right); \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(z) = e^{\Pi(z)} f(z), \\ \varphi_0(z) = e^{\Pi_0(z)} f_0(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_k(z) = e^{\Pi_k(z)} f_k(z) \end{cases}$$

étant des fonctions entières d'ordres finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$ (d'ordre infini). On peut appliquer à $\Phi(z)$ le théorème précédent, et l'on en conclut

$$(3)\qquad \Phi(z) = \chi(z) + \chi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + \chi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

$\chi(z), \chi_0(z), \ldots, \chi_k(z)$ étant des fonctions entières.

Aux environs d'un quelconque des points critiques $a_0, \ldots, a_k$, par exemple de a_i, $\Phi(z)$ est de l'ordre de $\chi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ et de $\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$; de même aux environs du point critique $z=\infty$. Par conséquent, $\chi(z), \ldots, \chi_i(z), \ldots$ sont d'ordres finis ou infinis en même temps que $\varphi(z), \ldots, \varphi_i(z), \ldots$ respectivement. Si $\chi_i(z)$ est d'ordre apparent fini ρ, il en est de même de $\varphi_i(z)$, et réciproquement.

Inversement, considérons la fonction (3), $\chi(z), \chi_0(z), \ldots, \chi_k(z)$ étant des fonctions entières d'ordres apparents finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_i$.

Nous diviserons les zéros de $\Phi(z)$ en $k+2$ catégories

$$(4)\quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots; \quad \alpha_0^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0, \ldots; \quad \ldots; \quad \alpha_0^k, \alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k, \ldots,$$

telles que chacune d'elles comprenne les zéros qui environnent respectivement les points critiques $\infty, a_0, a_1, \ldots, a_k$ [1].

---

[1] Pour fixer les idées, nous décrirons un cercle arbitraire comprenant à son intérieur tous les points critiques sauf ∞; les zéros extérieurs seront rattachés au point critique ∞, les autres au point critique le plus voisin ou à l'un des plus voisins, s'il y en a plusieurs.

Nous formerons alors un produit de facteurs primaires

$$\Pi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right) = \Pi P_\nu^i,$$

avec

$$P_\nu^i = \left(1 - \frac{\alpha_\nu^i - a_i}{z - a_i}\right) e^{\frac{\alpha_\nu^i - a_i}{z-a_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_\nu^i - a_i}{z-a_i}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_\nu - 1}\left(\frac{\alpha_\nu^i - a_i}{z-a_i}\right)^{p_\nu - 1}},$$

p_ν pouvant rester ou non fini, mais étant choisi de façon que

$$\Pi P_\nu^i = P_1^i P_2^i \ldots P_\nu^i \ldots$$

converge.

Nous opérerons ainsi pour chacune des $k+2$ catégories de zéros (4).

Le produit

$$\Pi . \Pi_0 . \Pi_1 \ldots \Pi_k = \varpi$$

a les mêmes zéros que $\Phi(z)$, et, par suite,

$$\frac{\Phi}{\Pi . \Pi_0 \ldots \Pi_k} = \frac{\Phi}{\varpi}$$

n'a plus de zéros, sauf peut-être aux points $\infty, a_0, \ldots, a_k$. On peut poser

$$\Phi = \varpi e^{\Phi_1},$$

Φ_1 n'ayant d'autres points critiques que ces points $\infty, a_0, \ldots, a_k$.

Soit

$$\Phi_1 = \log \Psi_1 = \log \rho + i(\psi + 2h_1\pi);$$

soient A et B deux points du plan des z, et un système de lacets allant du point A à chacun des points $a_0, \ldots, a_k$. Tout chemin issu de A et aboutissant à B, quand on fait varier z le long de ce chemin et que l'on étudie la variation correspondante de Φ_1, équivaut à la droite AB (ou à un chemin infiniment voisin de cette droite) et à un certain nombre des lacets en question.

Or, quand on suit le lacet environnant a_i, en partant de A et revenant en A, $\log\rho + i\psi$ devient $\log\rho + i(\psi + 2\lambda_i\pi)$, λ_i étant entier.

Dès lors, la fonction

$$\Phi_2 = \log \Psi_1 - \lambda_0 \log(z - a_0) - \ldots - \lambda_k \log(z - a_k)$$

est monodrome dans tout le plan. Elle est, d'après le théorème I, de la même forme que Φ. Donc

$$e^{\Phi_1} = e^{\log \Psi_1} = e^{\Phi_2}(z - a_0)^{\lambda_0} \ldots (z - a_k)^{\lambda_k}$$

et

$$\Phi = \varpi e^{\Phi_2}(z - a_0)^{\lambda_0} \ldots (z - a_k)^{\lambda_k} \quad (^1) \tag{5}$$

est de la forme (1).

Nous savons qu'aux environs du point critique a_i la fonction Φ est d'ordre ρ_i. D'après (5) et (1), Φ est aussi de l'ordre de φ_i. Donc $\varphi_i(z)$ est une fonction entière d'ordre ρ_i.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant, qui comprend le théorème I du § V.

Théorème II. — *Toute fonction quasi entière $\Phi(z)$ de la forme*

$$\chi(z) + \chi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \ldots + \chi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

($a_0, \ldots, a_k$ différents et $\neq \infty$), $\chi(z), \chi_0(z), \ldots, \chi_k(z)$ étant des fonctions entières d'ordres finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$. est aussi de la forme

$$\varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) \ldots \varphi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right),$$

$\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$ étant des fonctions entières d'ordres finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$; réciproquement, toute fonction de la deuxième forme est aussi de la première.

---

(1) Suivant que λ_i est positif ou négatif, on pourra faire rentrer $(z - a_i)^{\lambda_i}$ dans $\varphi(z)$ ou $\varphi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$.

La propriété ci-dessus est indifféremment vraie pour les fonctions quasi entières d'ordres finis ou infinis : elle a été indiquée, ainsi que le théorème I, avec d'autres procédés de démonstration et sans distinction d'ordre, par Weierstrass (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1876). *Comp.* Mittag-Leffler, *Acta math.*, t. IV, 1884.

VII.

Les analogies de propriétés entre les fonctions entières et les fonctions quasi entières d'ordres finis sont nombreuses. Nous allons en donner plusieurs exemples :

THÉORÈME III. — *Tout étant posé comme au théorème II, la condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(z)$ soit à croissance régulière aux environs du point critique a_i, où $\Phi(z)$ est d'ordre fini, est que la distribution de ses zéros y soit régulière, c'est-à-dire que $\varphi_i(z)$ et, par suite, $\chi_i(z)$ soient à croissance régulière.*

Si $\Phi(z)$ est d'ordre ρ_i aux environs du point critique $z = a_i$ (ou pour $z = a_i$), on a, pour $r = \left|\frac{1}{z - a_i}\right|$ assez grand,

$$|\Phi(z)| \leq e^{r^{\rho_i + \varepsilon}}.$$

Nous dirons que $\Phi(z)$ est *à croissance régulière aux environs de* $z = a_i$ si $\frac{\log\log M_r}{\log r}$ tend vers une limite quand z tend vers a_i, M_r étant la valeur maxima de $|\Phi(z)|$ pour $|z - a_i| = \frac{1}{r}$.

D'après le théorème II, la condition nécessaire et suffisante pour que la croissance de $\Phi(z)$ soit régulière aux environs de $z = a_i$ est que celle de $\chi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$ le soit; autrement dit, que $\chi_i(z)$ soit une fonction entière à croissance régulière. On peut dire la même chose pour $\Phi(z)$ et $\varphi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$.

D'autre part, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_i(z)$ ait sa croissance régulière est que la distribution de ses zéros soit régulière, c'est-à-dire que le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro soit $r_n = n^{\frac{1}{\rho_i} + \varepsilon}$, ε aussi petit qu'on veut, pourvu que n soit assez grand. *Si nous convenons de dire que la distribution des zéros de $\varphi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$ est régulière aux environs de $z = a_i$ (ou pour $z = a_i$) quand celle*

de $\varphi_i(z)$ *l'est (au sens de M. Borel), le théorème résulte de ce qui précède* (¹).

On peut encore étendre aux fonctions quasi entières les théorèmes que Laguerre et Chio ont établis au sujet des rapports entre les racines des fonctions entières et celles de leurs dérivées au point de vue de la réalité.

Soit (théorème II)

$$\Phi(z) = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\cdots\varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \tag{6}$$

une fonction quasi entière à points singuliers essentiels et réels. Admettons que $\varphi_i(z)$ soit, quel que soit i, d'ordre apparent < 2. On aura

$$\varphi_i(z) = e^{k_i z}\prod\left(1-\frac{z}{\alpha_n^{(i)}}\right)e^{\frac{z}{\alpha_n^{(i)}}}, \tag{7}$$

avec les notations de M. Borel (²).

$$\log\Phi(z) = \log\varphi(z) + \log\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots,$$

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{1}{(z-a_0)^2}\,\frac{\varphi_0'\left(\frac{1}{z-a_0}\right)}{\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)} - \ldots, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) - \left(\frac{1}{(z-a_0)^2}\,\frac{\varphi_0'}{\varphi_0}\right)' - \ldots. \tag{9}$$

On a encore

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = k + \sum\left(\frac{1}{z-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n}\right), \tag{10}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) = -\sum\frac{1}{(z-\alpha_n)^2}. \tag{11}$$

(¹) Nous excluons ici le cas où φ_i est entier.

(²) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 32.

D'autre part, soit $y = \frac{1}{z - a_i}$:

$$-\frac{1}{(z-a_i)^2}\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)} = \frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}y',$$

$$\left(-\frac{1}{(z-a_i)^2}\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}\right)' = \frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}y'' + \left(\frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\right)'y'^2,$$

avec

$$y' = -\frac{1}{(z-a_i)^2}, \qquad y'' = +\frac{2}{(z-a_i)^3},$$

par suite

$$\left(\frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}y'\right)' = \frac{2}{(z-a_i)^3}\left[k_i + \sum\left(\frac{1}{y-x_n^i} + \frac{1}{x_n^i}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{(z-a_i)^2}\left[-\sum\left(\frac{1}{y-x_n^i}\right)^2\right].$$

Aux environs d'une racine de $\varphi(z)$, $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ passe, quand z croît, par ∞, du négatif au positif. D'ailleurs, dès que z dépasse une certaine limite, c'est $\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)$ qui donne son signe à $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)$; en effet, $\sum\frac{1}{(y-x_n^i)^2}$ est fini; si $\varphi_i(z)$ est d'ordre < 1, il en est de même de $\sum\frac{1}{y-x_n^i}$ et $\sum\frac{1}{x_n^i}$; si $\varphi_i(z)$ est d'ordre ≥ 1,

$$\sum\left(\frac{1}{y-x_n^i} + \frac{1}{x_n^i}\right) = y\sum\frac{1}{x_n^i(y-x_n^i)}$$

est aussi fini. Il en résulte, d'après un théorème connu, que $\Phi(z)$ a toujours une racine réelle entre deux racines de $\Phi(z)$, et une seule.

Le changement de variables $u = \frac{1}{z-a_i}$ permet de vérifier le théorème aux environs de chaque point essentiel a_i : dès que z est suffisamment voisin de a_i, entre deux racines de $\Phi(z)$ voisines de a_i il y a toujours une racine réelle, et une seule, de $\Phi'(z)$.

Il reste encore à examiner ce qui a trait aux racines imaginaires de $\Phi'(z)$. On emploiera un procédé analogue à celui de M. Chio; on a

$$(12)\qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = k + \sum\left(\frac{x-\alpha_n}{(x-\alpha_n)^2+y^2} + \frac{1}{\alpha_n}\right) - i\sum\frac{y}{(x-\alpha_n)^2+y^2}.$$

De même, soit

$$\zeta = \xi + \eta i = \frac{1}{z-a_i} = \frac{1}{x-a_i+yi} = \frac{(x-a_i)-yi}{(x-a_i)^2+y^2},$$

$$\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)} = k_i + \sum\left(\frac{\xi-\alpha_n^{(i)}}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta^2} + \frac{1}{\alpha_n^{(i)}}\right) - i\sum\frac{\eta}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta^2};$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(z-a_i)^2}\,\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)} = A + i\Big\{&(\eta^2-\xi^2)\sum\frac{\eta}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta^2} \\ &+ 2\xi\eta\left[k_i + \sum\left(\frac{\xi-\alpha_n^{(i)}}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta^2} + \frac{1}{\alpha_n^{(i)}}\right)\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Considérons le coefficient de i dans le deuxième membre : d'après (12), le coefficient de $\xi\eta$ est la partie réelle de $\frac{\varphi_i'(\zeta)}{\varphi_i(\zeta)}$, c'est-à-dire $\leqq \left|\frac{\varphi_i'(\zeta)}{\varphi_i(\zeta)}\right|$. Si z est grand, cette partie réelle reste limitée, car $|\zeta|$ est petit. De même le coefficient de $\eta(\eta^2-\xi^2)$ est $\sum\frac{1}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta^2}$, qui est très voisin de $\sum\frac{1}{\alpha_n^{(i)2}}$ et est limité, puisque $\varphi_i(z)$ est d'ordre <2.

Ceci posé, admettons que $\Phi'(z)$ ait une racine imaginaire de module très grand, $z = x + yi$, et que $y = |z|^\mu\ (\mu \leqq 1)$.

Le coefficient de i dans (13) est de la forme

$$g_i\eta(\eta^2-\xi^2) + h_i\xi\eta,$$

où g_i et h_i sont finis, c'est-à-dire, au plus, de l'ordre de

$$\frac{|y|}{|z^2|}\left[g_i\left(\frac{|z|^{2\mu}}{|z^4|} + \frac{|x-a_i|^2}{|z^4|}\right) + h_i\frac{|x-a_i|}{|z^2|}\right].$$

Le coefficient de $\frac{|y|}{|z^2|}$ tend vers zéro quand $|z|$ croît indéfiniment.

Considérons, au contraire, le coefficient de i dans (12); on a

$$(x-\alpha_n)^2+y^2=x^2-2\alpha_n x+\alpha_n^2+y^2<6(x^2+y^2+\alpha_n^2),$$

puisque

$$|2\alpha_n x|<2\alpha_n^2+2x^2;$$

de plus,

$$\alpha_n^2+x^2+y^2\leq 2\alpha_n^2(x^2+y^2)$$

dès que $\alpha_n^2\geq 1$, et, dans ce cas,

$$(x-\alpha_n)^2+y^2<6\alpha_n^2(x^2+y^2).$$

Quand $\alpha_n^2<1$,

$$(x-\alpha_n)^2+y^2<6(x^2+y^2).$$

On en conclut

$$\sum\frac{|y|}{(x-\alpha_n)^2+y^2}>\frac{k'|y|}{6|z^2|}+\frac{|y|}{6(x^2+y^2)}\sum\frac{1}{\alpha_n^2},$$

ou

$$\sum\frac{|y|}{(x-\alpha_n)^2+y^2}>\frac{|y|}{|z^2|}\left(\frac{k'}{6}+\frac{1}{6}\sum\frac{1}{\alpha_n^2}\right)=\frac{|y|}{z^2}\theta,$$

k' et θ étant des quantités indépendantes de z, positives et, la première au moins, $\neq 0$.

Le coefficient de i dans $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est $\frac{|y|}{|z|^2}(-\theta_1+\varepsilon)$, où θ_1 est fini et positif, et ε aussi petit qu'on veut dès que $|z|$ est suffisamment grand. Il ne peut être nul que si $y=0$.

Donc le nombre des racines imaginaires est limité.

La démonstration précédente s'applique encore quand on suppose que $\Phi(z)$ possède un nombre limité q de racines imaginaires; il suffira de remplacer dans les calculs $\Phi(z)$ par $X.\Phi(z)$, $\Phi(z)$ n'ayant que des racines réelles et étant de la forme (6), et X étant un polynome en z de degré q pair n'ayant que des racines imaginaires.

On aura

$$\frac{(X\varphi)'}{X\varphi}=\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{X'}{X},$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{X'}{X}+\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=-\sum\frac{1}{(z-\alpha_n)^2}+\frac{XX''-X'^2}{X^2}.$$

Si

$$\begin{cases} X = A_0 z^q + A_1 z^{q-1} + \ldots, \\ X' = q A_0 z^{q-1} + \ldots, \\ X'' = q(q-1) A_0 z^{q-2} + \ldots. \end{cases}$$

$$X''X = q(q-1) A_0^2 z^{2q-2} + \ldots,$$

$$X'^2 = q^2 A_0^2 z^{2q-2} + \ldots,$$

$$X''X - X'^2 = -q A_0^2 z^{2q-2} + \ldots.$$

Dès que z dépasse une certaine limite finie, $X''X - X'^2$ est constamment négatif. Donc $\frac{X'}{X} + \frac{\varphi'}{\varphi}$ est toujours décroissant dans ses intervalles de continuité quand z est réel, et il ne peut s'annuler qu'une fois dans chacun de ces intervalles. Il en est de même de $\frac{X'}{X} + \frac{\Phi'}{\Phi}$.

D'autre part, $\frac{X'}{X}$ est évidemment réel quand z l'est, et l'on voit encore par la même démonstration que, si $\Phi'(x + yi) = 0$, y est nul dès que $|z|$ dépasse une certaine limite (¹).

Finalement, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Soit $\Phi(z)$ une fonction quasi entière à $k+1$ points singuliers essentiels d'ordres apparents < 2; si $\Phi(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires, il en est de même de $\Phi'(z)$, $\Phi''(z)$, ... Entre deux racines réelles de $\Phi(z)$, de module supérieur à une limite finie, il y a une racine réelle de $\Phi'(z)$, et une seule.*

On pourrait chercher de la même manière à étendre au cas où les ordres apparents sont quelconques, mais finis, les théorèmes analogues de Laguerre pour les fonctions entières d'ordre fini et la démonstra-

(¹) Il suffira de distinguer les valeurs de y supérieures au module de la plus grande racine de $X = 0$, et les autres, pour lesquelles $\frac{x}{y}$ est très grand. Le coefficient de i dans $\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{X'}{X}$ est toujours de la forme $-\frac{y}{|z^2|}\theta_1$, où θ_1 est fini et positif.

tion qu'en a donnée M. Borel [1]. Nous laisserons ce point de côté pour le moment.

On peut encore établir, pour les fonctions quasi entières d'ordre fini, un autre théorème connu de la théorie des fonctions entières [2] :

THÉORÈME V. — *Parmi toutes les fonctions quasi entières*

$$\varphi(z)F(z) - \varphi_1(z),$$

où $F(z)$ *est une fonction quasi entière à* $k+1$ *points singuliers essentiels* $a_0, a_1, \ldots, a_k$ *d'ordres apparents* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, $\varphi(z)$ *et* $\varphi_1(z)$ *des fonctions quasi entières ayant les mêmes points singuliers essentiels, mais d'ordres apparents plus petits respectivement que ceux de* $F(z)$ *pour un même point singulier essentiel* a_i, *il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à* ρ_i *pour* $z = a_i$.

En effet, on peut toujours prendre $a_i = \infty$, par exemple.

Supposons qu'il y en ait deux

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi(z)F(z) - \varphi_1(z) = \Phi(z)e^{P(z)}, \\ \psi(z)F(z) - \psi_1(z) = \Psi(z)e^{Q(z)}, \end{cases}$$

Φ et Ψ étant des produits canoniques de facteurs primaires d'ordres inférieurs à ρ pour $z = \infty$, et

$$(15)\qquad \begin{cases} P(z) = X(z) + X_0\left(\dfrac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + X_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right), \\ Q(z) = Y(z) + Y_0\left(\dfrac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + Y_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right), \end{cases}$$

$X(z)$, $Y(z)$ étant des polynomes en z de degrés ρ; $X_0(z), \ldots, X_k(z)$ d'une part, $Y_0(z), \ldots, Y_k(z)$ d'autre part, des fonctions entières ou des polynomes en z (ρ doit alors évidemment être entier). En éliminant F entre les deux équations (14), on obtient

$$(16)\qquad \varphi\Psi e^{Q} - \psi\Phi e^{P} = \psi\varphi_1 - \psi_1\varphi.$$

[1] *Loc. cit.*, p. 36 et suiv.

[2] BOREL, *loc. cit.*, p. 95.

Considérons ce qui se passe aux environs du point critique essentiel $z = \infty$.

Soient, aux environs de ce point, λ le plus grand des ordres de $\varphi\Psi$, $\psi\Phi$, $\psi\varphi_1 - \psi_1\varphi$ qui sont des fonctions quasi entières d'ordres apparents $< \rho$ aux environs de $z = \infty$. Nous poserons

$$(17) \qquad \begin{cases} X(z) = A(z) + B(z), \\ Y(z) = A_1(z) + B_1(z), \end{cases}$$

$A(z)$, $A_1(z)$ désignant l'ensemble des termes de X et Y de degrés $> \lambda$.

On peut vérifier alors directement l'impossibilité de (16), d'abord si A et A_1 n'ont pas leurs termes de degrés les plus élevés identiques, ensuite si l'on n'a pas $A = A_1 = 0$. On peut aussi prendre les dérivées des deux membres de (16) et vérifier que la relation ainsi obtenue, jointe à (16), est impossible. (*Voir* la démonstration de M. Borel pour les fonctions entières.)

Corollaire I. — *Parmi les fonctions* $\varphi F - \varphi_1$, *où* φ *et* φ_1 *sont d'ordres apparents tous plus petits respectivement que ceux de* $F(z)$, *il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à* ρ, *une d'ordre inférieur à* ρ_0, ..., *une d'ordre réel inférieur à* ρ_k, *enfin une au plus d'ordre réel inférieur à la fois à* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$.

Soit, dans un quelconque des cas ci-dessus, χ le produit convergent ayant pour racines les racines communes à φ et φ_1 : on aura le même théorème ou le même corollaire pour les fonctions

$$\frac{\varphi}{\chi} F + \frac{\varphi_1}{\chi};$$

par suite, parmi les équations

$$(18) \qquad F + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$$

il y en a une au plus dont l'ordre réel est inférieur à ρ_i aux environs de $z = a_i$.

Corollaire II. — *Tout étant posé comme dans l'un des cas du*

théorème V ou de son corollaire I, parmi les équations

$$F + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$$

il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à ρ_i *pour* $z = a_i$, *et* a fortiori *une au plus d'ordre réel inférieur à la fois à* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$.

Ce qui précède peut s'étendre à certaines catégories de fonctions quasi entières d'ordre infini. Ainsi [1], soit $F(z)$ une fonction quasi entière vérifiant pour les grandes valeurs de z l'inégalité

$$|F(z)| < e^{e^{r^m}} \tag{19}$$

pour $|z| = r$, m étant une constante, ou des inégalités analogues aux environs de $z = a_i$, si $\left|\frac{1}{z - a_i}\right| = r$. Soient encore $\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1$ des fonctions quasi entières d'ordres finis aux environs du point critique $z = a_i$ et telles que $\varphi\psi_1 - \psi_1\varphi \neq 0$.

Si les deux fonctions entières $\varphi F - \varphi_1$, $\psi F - \psi_1$ sont d'ordres réels finis aux environs du point critique $z = a_i$ (on pourra, par exemple, supposer $a_i = \infty$), $F(z)$ doit y être d'ordre fini, à moins que ces deux fonctions ne diffèrent que par un facteur constant.

En effet, soient

$$\begin{cases} \varphi F - \varphi_1 = \theta e^G, \\ \psi F - \psi_1 = \chi e^H, \end{cases} \tag{20}$$

où θ et χ sont des fonctions quasi entières d'ordres réels finis aux environs de $z = \infty$, G et H des fonctions quasi entières. Aux environs d'un point critique quelconque, θe^G et χe^H satisfont à des inégalités de la forme (19). Donc G et H sont d'ordres finis aux environs de ce point.

D'ailleurs, éliminant F entre les deux équations (20), on aura

$$\varphi\chi e^H - \psi\theta e^G = \psi\varphi_1 - \varphi\psi_1 \tag{21}$$

---

[1] *Comparer* BOREL, *loc. cit.*, p. 100.

Cette relation est de la forme

$$Ae^{H} + Be^{G} = C,$$

où A, B, C sont des fonctions quasi entières d'ordres finis pour $z = \infty$. En prenant la dérivée des deux membres, on est conduit, comme dans le cas des fonctions entières, à une impossibilité (*voir* Borel, *loc. cit.*); nous conclurons donc :

Théorème VI. — *Soient* $F(z)$ *une fonction quasi entière à* $k+1$ *points singuliers essentiels* $a_0, a_1, \ldots, a_k$; φ, φ_1 *des fonctions quasi entières d'ordres finis aux environs du point critique* $z = a_i$.

Si $\left|\frac{1}{|z-a_i|}\right| = r$, *et si, dès que* r *dépasse une limite finie,*

$$|F(z)| < e^{e^{r^m}}$$

pour $|z| = r$, m *étant une constante, parmi toutes les fonctions* $\varphi F - \varphi_1$ *qui diffèrent autrement que par un facteur constant il y en a une au plus d'ordre réel fini aux environs de* $z = a_i$, *à moins que* $F(z)$ *n'y soit d'ordre fini.*

Corollaire I. — *Si* F, φ, φ_1 *jouissent des mêmes propriétés aux environs de tous les points critiques, parmi les fonctions* $\varphi F - \varphi_1$ *il y en a une au plus d'ordres réels tous finis, à moins que* $F(z)$ *n'ait tous ses ordres finis.*

Corollaire II. — *Tout étant posé comme au théorème VI et au corollaire I, si* F *n'est pas d'ordre fini aux environs de* $z = a_i$ (*aux environs de tous les points critiques*), *parmi les équations*

$$F - \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$$

il y en a une au plus d'ordre réel fini aux environs de ce point (aux environs de tous les points critiques).

On pourrait aller plus loin et considérer les fonctions quasi entières $F(z)$ d'ordre $\geq e^{e^{r^m}}$ aux environs de $z = a_i$. Des raisonnements de même nature conduisant à des résultats analogues paraissent applicables : nous ne nous y arrêterons pas pour le moment.

Définition. — *Une fonction monodrome qui, en dehors de $k+2$ points singuliers essentiels ∞, a_0, a_1, ..., a_{k+1}, n'a d'autres points critiques que des pôles sera dite une* fonction quasi méromorphe.

On peut former une fonction quasi entière Φ ayant pour pôles les pôles de cette fonction : $F\Phi$ est alors une fonction quasi entière Ψ; donc

$$F = \frac{\Psi}{\Phi} \quad (^1).$$

Théorème VII. — *Toute fonction quasi méromorphe est le quotient de deux fonctions quasi entières.*

On peut encore étendre aux fonctions quasi méromorphes certains résultats relatifs aux fonctions méromorphes (²) et en indiquer de nouveaux.

Supposons que les ordres

$$\rho, \quad \rho_0, \quad \ldots, \quad \rho_k,$$
$$\sigma, \quad \sigma_0, \quad \ldots, \quad \sigma_k$$

de Ψ et Φ soient tous finis : si

$$\tau, \quad \tau_0, \quad \ldots, \quad \tau_k$$

sont les plus grands des nombres ρ et σ, ρ_0 et σ_0, ..., ρ_k et σ_k, nous dirons que F est d'ordres finis τ, τ_0, ..., τ_k.

Soient φ_1 et ψ_1 deux fonctions quasi méromorphes distinctes et

$$(22) \qquad \begin{cases} F - \varphi_1 = \theta e^{\zeta} \quad (^3), \\ F - \psi_1 = \eta_1 e^{\eta}; \end{cases}$$

(¹) Weierstrass, *loc. cit.*

(²) Borel, *Ann. de l'École Normale*, 1901, p. 215.

(³) e^{ζ} est d'ordre τ aux environs de $z = \infty$, car, sinon,

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \theta = \frac{\gamma}{\delta}, \qquad \varphi_1 + \theta e^{\zeta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma e^{\zeta}}{\beta\delta},$$

φ_1 et θ étant d'ordres $< \tau$, il en serait de même de $\alpha\delta + \beta\gamma e^{\zeta}$.

supposons que les ordres de φ_1 et ψ_1 soient tous inférieurs respectivement à ceux de F et que θ et η soient les quotients de produits de facteurs primaires relatifs à $F - \varphi_1$ et $F - \psi_1$.

G et H sont des expressions de la forme (15) :

$$G = X(z) + X_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \ldots,$$

$$H = Y(z) + Y_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \ldots,$$

où $X(z)$, $X_0(z)$, ... $Y(z)$, $Y_0(z)$, ... sont des polynomes.

Les ordres de θ et η, qui sont les ordres réels de $F - \varphi_1$ et $F - \psi_1$, étant supposés inférieurs à ceux de F, ces derniers sont égaux aux degrés des polynomes $X(z)$ et $Y(z)$, $X_0(z)$ et $Y_0(z)$, ...

(22) donne

$$\psi_1 - \varphi_1 = \theta e^G - \eta e^H. \tag{23}$$

Écrivons encore, comme dans (17),

$$\begin{cases} X(z) = A(z) + B(z), \\ Y(z) = A_1(z) + B_1(z), \end{cases}$$

A et A_1 désignant l'ensemble des termes de X et Y de degrés $> \lambda$, λ étant le plus grand des ordres de φ_1, ψ_1, θ, η; il suffit maintenant de remarquer que (23), quand on y chasse les dénominateurs, se ramène à la forme

$$Ae^G + Be^H = C.$$

où A, B, C sont des fonctions quasi entières d'ordres $< \tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$; nous avons vu qu'une relation de cette nature est impossible [équations (16) et (21)].

Nous en concluons ce théorème :

Théorème VIII. — *Parmi toutes les fonctions quasi méromorphes* $F - \varphi_1$ *d'ordres finis, où* F *est une fonction quasi méromorphe d'ordres* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ *finis, à* $k + 2$ *points singuliers essentiels*

(dont $z = \infty$), φ_1 une quelconque des fonctions quasi méromorphes d'ordres tous plus petits, F et φ_1 ayant les mêmes points critiques essentiels, il y en a une au plus dont tous les ordres réels sont inférieurs à ceux de F [1].

Nous allons de même établir pour les fonctions quasi méromorphes un théorème de MM. Picard et Borel pour les fonctions méromorphes :

THÉORÈME IX. — *Étant donné une fonction quasi méromorphe* $F(z)$ *d'ordres* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ *à* $k+2$ *points singuliers essentiels (dont* $z = \infty$*), parmi les équations*

$$F(z) = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ *désigne une fonction quasi méromorphe d'ordres tous inférieurs à* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$, *il y en a au plus deux qui soient exceptionnelles, c'est-à-dire telles que l'un au moins des exposants de convergence des suites des modules de leurs racines soit inférieur à l'ordre correspondant parmi les nombres* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$.

Il suffit de suivre à peu près la même marche que M. Borel pour les fonctions méromorphes.

On considère encore les diverses fonctions

$$g(z) = \frac{MF + N}{M'F + N'},$$

avec $MN' - M'N \neq 0$, M, M', N, N' étant des fonctions quasi entières d'ordres tous inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$. On distingue trois cas :

---

[1] Un théorème semblable, par analogie avec le théorème V et ses corollaires, a évidemment lieu aux environs de chaque point critique, F étant une fonction quasi méromorphe d'ordre fini aux environs d'un point critique seulement : nous n'insistons pas. Ces résultats et ceux du théorème VIII sont nouveaux, même pour les fonctions méromorphes.

PREMIER CAS. — *Aucune des transformées $g(z)$ n'est une fonction quasi entière* [1] *aux environs d'aucun des points critiques* ∞, $a_0, \ldots, a_k$.

Dans ce cas,

$$F(z) = -\frac{N'}{M'}$$

admet $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ comme exposants de convergence de ses racines.

En effet, ceci revient à dire, si $F = \frac{F_1}{F_2}$, F_1 et F_2 étant des fonctions quasi entières, que

$$M'F_1 + N'F_2$$

est une fonction quasi entière d'ordres réels $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$. Si l'ordre de cette fonction aux environs de $z = a_i$ était $< \tau_i$, on pourrait trouver une fonction entière M d'ordres $< \tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ et ayant les mêmes zéros aux environs de $z = a_i$;

$$g(z) = \frac{MF(z)}{M'F(z) + N'} = \frac{MF_1}{M'F_1 + N'F_2}$$

n'a plus d'infinis aux environs de $z = a_i$: c'est une fonction quasi entière aux environs de ce point, contrairement à l'hypothèse faite.

DEUXIÈME CAS. — *Parmi les transformées $g(z)$ il y a des fonctions quasi entières aux environs d'un au moins des points critiques a_i, mais ces fonctions quasi entières sont toutes d'ordre réel τ_i.*

Soit

$$\gamma(z) = \frac{\mu F + \nu}{\mu_1 F + \nu_1}$$

---

[1] Nous dirons que

$$g(z) = \varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) \cdots \varphi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

(théorème II), où $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$ sont des fonctions méromorphes de z, est quasi entière aux environs du point critique a_i si $\varphi_i(z)$ n'a qu'un nombre limité de pôles.

(μ, μ_1, ν, ν_1 fonctions quasi entières d'ordres inférieurs à τ, τ_0 ..., τ_k, avec $\mu\nu_1 - \nu\mu_1 \neq 0$) une des transformées de $F(z)$ qui soit fonction entière aux environs de $z = a_i$.

En raisonnant comme M. Borel, on voit que les équations

$$F = -\frac{N}{M}$$

ou

$$g(z) = \frac{MF + N}{M} = 0$$

admettent τ_i comme exposant de convergence de la suite des modules de leurs zéros aux environs de $z = a_i$, à moins que l'on n'ait

$$\frac{N}{M} = \frac{\nu_1}{\mu_1}.$$

Si la même circonstance se présente aux environs de plusieurs des points critiques, en nombre k', on devra avoir à la fois

$$\frac{N}{M} = \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{\nu_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{\nu_{k'}}{\mu_{k'}}.$$

Finalement, dans le cas supposé ici, il y a au plus une équation exceptionnelle.

Troisième cas. — *Parmi les transformées $g(z)$ il y a des fonctions quasi entières aux environs d'un au moins des points critiques a_i, mais une au moins de ces fonctions y est d'ordre réel inférieur à τ_i.*

Il nous suffira de considérer le cas où $a_i = \infty$. L'ordre apparent de cette fonction γ est τ et

$$\gamma = MAe^{P(z)},$$

où P est un polynome de degré τ, M une fonction entière de z d'ordre $< \tau$, A une fonction quasi méromorphe d'ordres $\leq \tau_0, \ldots, \tau_k$ n'ayant pour points critiques essentiels que $a_0, \ldots a_k$.

On a

$$(24) \qquad F = \frac{\mu MA e^{P} + \nu}{\mu_1 MA e^{P} + \nu_1},$$

avec $\mu\nu_1 - \nu\mu_1 \neq 0$, μ, μ_1, ν, ν_1 étant des fonctions quasi entières d'ordres $< \tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$, $0 = F(z) + \frac{N'}{M'}$ équivaut à

$$(25) \qquad \frac{M'(\mu MA e^{P} + \nu) + N'(\mu_1 MA e^{P} + \nu_1)}{M'(\mu_1 MA e^{P} + \nu_1)} = 0.$$

Supposons d'abord que le numérateur et le dénominateur aient des racines communes, elles satisfont à

$$M'^2(\mu\ MA e^{P} + \nu\ ) = 0,$$
$$M'\ (\mu_1 MA e^{P} + \nu_1) = 0;$$

comme on suppose $M' \neq 0$, $N' \neq 0$, elles devront satisfaire soit à $\mu\nu_1 - \nu\mu_1 = 0$, soit à $M' = 0$, c'est-à-dire à des équations d'ordres inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$.

Ceci posé, considérons le numérateur de (25) qui est de la forme

$$(M'\mu + N'\mu_1) MA e^{P} + M'\nu + N'\nu_1 = 0.$$

Si $M'\mu + N'\mu_1 \neq 0$, $M'\nu + N'\nu_1 \neq 0$, appliquons-lui le théorème V en chassant le dénominateur de A : parmi les fonctions quasi entières d'ordre inférieur à τ aux environs de $z = \infty$, et de la forme

$$\varphi e^{P} - \varphi_1,$$

il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à τ pour $z = \infty$. Ici cette fonction est évidemment (à un facteur constant près) φe^{P}; si φ et φ_1 sont $\neq 0$, $\varphi e^{P} - \varphi_1$ est d'ordre τ. Donc, quand $M'\mu + N'\mu_1 \neq 0$, $M'\nu + N'\nu_1 \neq 0$, le numérateur de (25) est d'ordre réel τ, et l'exposant de convergence de la suite des modules de ses racines est τ.

Si

$$M'\mu + N'\mu_1 = 0,$$

on a

$$\frac{N'}{M} = -\frac{\mu}{\mu_1};$$

le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$ étant parfaitement déterminé d'après (24), on a une équation correspondante unique exceptionnelle.

De même pour $M'\nu + N'\nu_1 = 0$: on a ainsi deux équations exceptionnelles.

Si l'une de ces circonstances se présente aux environs de plusieurs points critiques, on aura des valeurs analogues $\frac{\mu'}{\mu_1}, \frac{\nu'}{\nu_1}, \ldots$, qui devront être égales chacune à l'un des rapports $\frac{\mu}{\mu_1}, \frac{\nu}{\nu_1}$. En tout cas, on aura encore au plus deux équations exceptionnelles. C. Q. F. D.

Essai sur la théorie des fractions continues;

PAR M. AURIC.

Nous nous proposons, dans cette étude, de généraliser la notion de fraction continue, de manière à pouvoir appliquer cette théorie si féconde aux nombres négatifs et complexes.

La théorie actuelle repose en effet sur l'égalité suivante :

$$a_i = A_i + \frac{1}{a_{i+1}},$$

dans laquelle A_i représente l'*entier immédiatement inférieur* au nombre *réel et positif* a_i; il en résulte immédiatement que cette théorie n'est pas applicable aux nombres négatifs et complexes.

Reprenant un mode de développement déjà considéré par M. Minnigerode dans une Note insérée en 1873 dans les *Nachrichten* de Göttingue et par M. Hurwitz dans les *Acta mathematica* (T. XI et XII), nous avons eu l'idée de prendre pour A_i non l'entier immédiatement inférieur, mais bien l'*entier le plus rapproché* du nombre *quelconque* a_i; de plus, pour faire disparaître une ambiguïté de signe qui trouble profondément la théorie actuelle, nous avons considéré le reste de la division changé de signe, ce qui donne comme égalité fondamentale

$$a_i = A_i - \frac{1}{a_{i+1}}.$$

En partant de cette définition, nous avons élaboré une théorie des fractions continues qui nous a paru plus rationnelle et, en tout cas, plus générale.

Examinant en premier lieu le cas des nombres réels, au lieu de nous borner à l'étude exclusive des réduites, nous avons considéré les termes de celles-ci comme des fonctions numériques servant à l'étude des quotients complets et nous avons établi les formules générales qui permettent d'obtenir un quotient complet en fonction de deux quotients complets quelconques; nous avons étudié ensuite les variations de petitesse de ces quotients complets selon le rang qu'ils occupent, et en même temps les variations de grandeur des termes des réduites ordinaires : nous en avons conclu la convergence de celles-ci.

Nous avons démontré ensuite le théorème de Lagrange sur la périodicité, quant au développement en fraction continue, des nombres quadratiques du deuxième degré. Cette théorie s'applique presque sans aucun changement aux nombres négatifs et complexes et permet, par suite, de donner une véritable unité aux recherches mémorables de Dirichlet et de Dedekind.

Nous croyons que les résultats obtenus permettront d'apporter de notables améliorations dans la résolution ou, mieux, l'exposition des deux difficiles problèmes de cette partie de la théorie des nombres : nous voulons parler de la réduction des irrationnelles racines d'une équation en λ de degré > 2 et de la recherche du nombre des classes de nombres quadratiques de discriminant donné.

Ces applications feront l'objet d'une Note spéciale ultérieure.

I. — Formules générales.

1. Considérons deux nombres réels quelconques, positifs ou négatifs, a_i, a_{i+1}, tels que

$$|a_i| > |a_{i+1}|.$$

Nous diviserons a_i par a_{i+1} et nous prendrons comme quotient approché l'entier λ_i, le plus rapproché du quotient exact $\frac{a_i}{a_{i+1}}$.

En appelant a_{i+2} le reste de la division *changé de signe*, on aura

$$a_i = \lambda_{i+1} a_{i+1} - a_{i+2}$$

avec

$$|a_{i+2}| < \frac{1}{2} |a_{i+1}|.$$

Nous pouvons de même diviser a_{i+1} par a_{i+2}.

Il viendra

$$a_{i+1} = \lambda_{i+2} a_{i+2} - a_{i+3}$$

avec

$$|a_{i+3}| < \frac{1}{2} |a_{i+2}| < \frac{1}{4} |a_{i+1}|,$$

et ainsi de suite.

Pour $k \geqq 1$, on aura

$$\left|\frac{a_{i+k}}{a_{i+k+1}}\right| > 2;$$

par suite, il est clair que, $|\lambda_{i+k+1}|$ étant l'entier le plus rapproché de ce rapport, on aura

$$|\lambda_{i+k+1}| \geqq 2.$$

De plus, si $|\lambda_{i+k+1}| = 2$, il est évident que a_{i+k} et a_{i+i+2} seront de signe contraire.

Les nombres positifs $|a_{i+1}|$, $|a_{i+2}|$, $|a_{i+3}|$, ... décroissent au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; ils ont donc pour limite zéro.

Deux cas peuvent se présenter :

a. Un reste a_{i+n+1} devient effectivement nul.

Dans ce cas, il est clair que les nombres a_i et a_{i+1} sont commensurables et ont comme plus grand commun diviseur a_{i+n}, lequel se trouve déterminé suivant la méthode classique bien connue.

b. Les restes a_{i+n+1}, a_{i+n+2}, ... diminuent indéfiniment en valeur absolue sans jamais cependant devenir nuls; dans ce cas, a_i et a_{i+1} sont incommensurables; il est clair, en effet, qu'ils ne peuvent avoir de diviseur commun, si petit qu'il soit, puisque ce diviseur serait également commun à a_{i+n+1}, a_{i+n+2}, ..., lesquels, par hypothèse, diminuent indéfiniment en valeur absolue.

2. Considérons les relations générales

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
a_{i-n} & = \lambda_{i-n+1} a_{i-n+1} - a_{i-n+2}, \\
a_{i-n+1} & = \lambda_{i-n+2} a_{i-n+2} - a_{i-n+3}, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\
a_{i-2} & = \lambda_{i-1} a_{i-1} - a_i, \\
a_{i-1} & = \lambda_i a_i - a_{i+1}, \\
a_i & = \lambda_{i+1} a_{i+1} - a_{i+2}, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\
a_{i+n-2} & = \lambda_{i+n-1} a_{i+n-1} - a_{i+n}, \\
a_{i+n-1} & = \lambda_{i+n} a_{i+n} - a_{i+n+1}.
\end{array}
\right.
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} (A) \\
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} (B)
\end{array}
$$

Au moyen des relations (A), en remontant de proche en proche, on peut exprimer a_i sous la forme d'une fonction linéaire à coefficients entiers de a_{i-n} et a_{i-n+1}; de même, au moyen des relations (B), en descendant de proche en proche, on peut exprimer a_i sous la forme d'une fonction linéaire à coefficients entiers de a_{i+n} et a_{i+n+1}; c'est l'étude de ces fonctions et de leurs relations entre elles que nous allons entreprendre en premier lieu.

3. Posons

$$
(2)\qquad a_i = P^i_{i+n} a_{i+n} + Q^i_{i+n} a_{i+n+1};
$$

nous avons, d'après (1),

$$
a_{i-n} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - a_{i+n+2},
$$

d'où, en substituant dans (2),

$$
a_i = (\lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + Q^i_{i+n}) a_{i+n+1} - P^i_{i+n} a_{i+n+2}.
$$

Mais, par définition,

$$
a_i = P^i_{i+n+1} a_{i+n+1} + Q_{i+n+1} a_{i+n+2},
$$

d'où l'on tire par comparaison les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} P^i_{i+n+1} = \lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + Q^i_{i+n}, \\ Q^i_{i+n+1} = \quad - P^i_{i+n}. \end{cases}$$

Posons de même

$$a_i = P^i_{i-n+1} a_{i-n+1} + Q^i_{i-n+1} a_{i-n+2}.$$

Nous avons, d'après (1),

$$a_{i-n+2} = \lambda_{i-n+1} a_{i-n+1} - a_{i-n};$$

d'où, en substituant,

$$a_i = - Q^i_{i-n+1} a_{i-n} + (P^i_{i-n+1} + \lambda_{i-n+1} Q^i_{i-n+1}) a_{i-n+1}.$$

Mais, par définition,

$$a_i = P^i_{i-n} a_{i-n} + Q^i_{i-n} a_{i-n+1},$$

d'où, par comparaison,

$$(3')\qquad \begin{cases} Q^i_{i-n+1} = - P^i_{i+n}, \\ P^i_{i-n+1} = - \lambda_{i-n+1} Q^i_{i-n+1} + Q^i_{i-n} = \lambda_{i-n+1} P^i_{i-n} + Q^i_{i-n}, \end{cases}$$

relations qui sont identiques à (3), sauf le changement de signe de n.

En remplaçant, dans (2), P^i_{i+n} par sa valeur $- Q^i_{i+n+1}$, nous obtenons la relation fondamentale

$$(4)\qquad a_i = a_{i+n+1} Q^i_{i+n} - a_{i+n} Q^i_{i+n+1},$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(4')\qquad a_i = \begin{vmatrix} Q^i_{i+n} & Q^i_{i+n+1} \\ a_{i+n} & a_{i+n+1} \end{vmatrix},$$

et cette relation subsiste quel que soit le signe de n.

4. Nous avons, par définition,

$$a_i = P^i_{i+1} a_{i+1} + Q^i_{i+1} a_{i+2} = \lambda_{i+1} a_{i+1} - a_{i+2},$$

d'où l'on tire

$$P^i_{i+1} = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+1} P^i_i + Q^i_i,$$
$$Q^i_{i+1} = -1 = -P^i_i.$$

Il en résulte

$$P^i_i = 1 = \lambda_i P^i_{i-1} + Q^i_{i-1},$$
$$Q^i_i = 0 = -P_{i-1},$$

d'où

$$(5) \qquad \begin{cases} P^i_{i-1} = 0 = \lambda_{i-1} P^i_{i-2} + Q^i_{i-2}, \\ Q^i_{i-1} = 1 = -P^i_{i-2}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$P^i_{i-2} = -1 \qquad \text{et} \qquad Q^i_{i-2} = \lambda_{i-1}.$$

Ce sont des valeurs particulières des symboles P et Q qui nous seront utiles dans la suite.

5. Des relations (3) nous déduisons immédiatement

$$(6) \qquad Q^i_{i+n+2} = \lambda_{i+n+1} Q^i_{i+n+1} - Q^i_{i+n};$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q ayant même indice supérieur.

De même, la relation (1)

$$a_{i+n+2} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - a_{i+n}$$

donne immédiatement, si l'on exprime a_{i+n+2}, a_{i+n+1}, a_{i+n} en fonction de a_k et a_{k+1} et si l'on égale dans les deux membres les coefficients de a_{k+1},

$$(7) \qquad Q^{i+n+2}_k = \lambda_{i+n+1} Q^{i+n+1}_k - Q^{i+n}_k;$$

c'est une nouvelle relation récurrente entre les symboles Q ayant même indice inférieur.

6. Les relations (6) et (7) ne sont d'ailleurs que des cas particuliers d'une relation générale que nous allons établir.

La relation (4) donne immédiatement, de la même manière que nous avons obtenu la relation (7),

$$(8)\qquad Q_k^i = Q_k^{i+n+1} Q_{i+n}^i - Q_k^{i+n} Q_{i+n+1}^i,$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(8')\qquad Q_k^i = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^i & Q_{i+n+1}^i \\ Q_k^{i+n} & Q_k^{i+n+1} \end{vmatrix}.$$

Pour $k = i + n - 1$, la relation (8) devient

$$Q_{i+n-1}^i = Q_{i+n-1}^{i+n+1} Q_{i+n}^i - Q_{i+n-1}^{i+n} Q_{i+n+1}^i.$$

Or, d'après (5),

$$Q_{i+n-1}^{i+n+1} = \lambda_{i+n}; \qquad Q_{i+n-1}^{i+n} = 1,$$

d'où

$$Q_{i+n-1}^i = \lambda_{i+n} Q_{i+n}^i - Q_{i+n+1}^i;$$

c'est la relation (6).

De même, si l'on fait $n = -2$ dans la relation (8), on a

$$Q_k^i = Q_k^{i-1} Q_{i-2}^i - Q_k^{i-2} Q_{i-1}^i.$$

Or, d'après (5),

$$Q_{i-2}^i = \lambda_{i-1}, \qquad Q_{i-1}^i = 1,$$

d'où

$$Q_k^i = \lambda_{i-1} Q_k^{i-1} - Q_k^{i-2};$$

c'est la relation (7).

7. Si dans la relation (8) nous faisons $k = i$, il vient

$$Q_i^i = 0 = Q_i^{i+n+1} Q_{i+n}^i - Q_i^{i+n} Q_{i+n+1}^i,$$

d'où, en supposant $Q_i^{i+n} Q_i^{i+n+1} \neq 0$,

$$\frac{Q_{i+n}^i}{Q_i^{i+n}} = \frac{Q_{i+n+1}^i}{Q_i^{i+n+1}}.$$

Cette relation montre que la valeur de ce rapport est indépendante

de n; or, pour $n = -1$, on a

$$Q_{i+1}^{i} = 1, \qquad Q_i^{i-1} = -1;$$

donc, ce rapport est égal à -1 et nous obtenons la formule fondamentale de réciprocité des indices

$$(9) \qquad Q_{i+n}^{i} = -Q_i^{i+n}.$$

Si l'on avait

$$Q^{i+n} = 0,$$

la relation (8) donnerait

$$Q_i^{i+n+1} Q_{i+n}^{i} = 0.$$

Or, on ne peut avoir simultanément

$$Q_i^{i+n} = 0, \qquad Q_i^{i+n+1} = 0,$$

car la relation récurrente (7) donnerait, quel que soit k,

$$Q_i^k = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la formule $Q_i^{i-1} = -1$; il faut donc que l'on ait

$$Q_{i+n}^{i} = 0,$$

et dès lors, même dans ce cas, la relation (9) est encore vérifiée.

8. La relation (8) devient, en tenant compte de (9),

$$(10) \qquad Q_i^k = Q_{i+n+1}^k Q_{i+n}^i - Q_{i+n}^k Q_{i+n+1}^i,$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(10') \qquad Q_i^k = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^i & Q_{i+n+1}^i \\ Q_{i+n}^k & Q_{i+n+1}^k \end{vmatrix}.$$

Pour $k = i + 1$, on aura

$$Q_i^{i+1} = 1 = Q_{i+n}^i Q_{i+n+1}^{i+1} - Q_{i+n}^{i+1} Q_{i+n+1}^i,$$

ou

$$(11) \qquad 1 = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^{i} & Q_{i+n+1}^{i} \\ Q_{i+n}^{i+1} & Q_{i+n+1}^{i+1} \end{vmatrix}.$$

Si, dans le deuxième membre de la relation (10′), nous multiplions la première colonne par a_{i+n+1}, la deuxième par $-a_{i+n}$, il viendra, en ajoutant et en tenant compte de (4),

$$-a_{i+n}Q_i^k = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^{i} & a_i \\ Q_{i+n}^{k} & a_k \end{vmatrix}$$

ou bien, en changeant de signe,

$$(12) \qquad a_{i+n}Q_i^k = \begin{vmatrix} a_i & Q_{i+n}^{i} \\ a_k & Q_{i+n}^{k} \end{vmatrix},$$

et nous obtiendrons, par le même procédé que celui employé pour les relations (7) et (8),

$$(13) \qquad Q_j^{i+n}Q_i^k = \begin{vmatrix} Q_j^{i} & Q_{i+n}^{i} \\ Q_j^{k} & Q_{i+n}^{k} \end{vmatrix}.$$

Telle est la relation générale qui résume toutes les précédentes.

9. Considérons les deux nombres réels a_0 et a_1 avec $|a_0| > |a_1|$ et effectuons les opérations indiquées au n° **1**.

Si, dans les divisions successives, a_{n+1} est le premier reste nul, on aura les relations

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 a_1 - a_2, \\ a_1 &= \lambda_2 a_2 - a_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n-2} &= \lambda_{n-1} a_{n-1} - a_n, \\ a_{n-1} &= \lambda_n a_n, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{a_0}{a_1} = \lambda_1 - \cfrac{1}{\lambda_2 - \cfrac{1}{\lambda_3 - \ddots - \cfrac{1}{\lambda_{n-1} - \cfrac{1}{\lambda_n}}}}.$$

L'expression ainsi obtenue s'appelle une *fraction continue*, dont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ sont les *coefficients* ou *quotients incomplets*, et nous écrirons

$$\frac{a_0}{a_1} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n).$$

La relation (4) nous donne

$$a_n = a_1 Q_0^n - a_0 Q_1^n;$$

d'autre part, puisque $a_{n+1} = 0$, il vient

$$a_0 = a_{n+1} Q_n^0 - a_n Q_{n+1}^0 = a_n Q_0^{n+1}.$$
$$a_1 = a_{n+1} Q_n^1 - a_n Q_{n+1}^1 = a_n Q_1^{n+1},$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$(14) \qquad \frac{a_0}{a_1} = \frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n).$$

En substituant a_0 et a_1 dans la relation qui précède et en divisant par $a_n \neq 0$, il vient

$$1 = Q_0^n Q_1^{n+1} - Q_0^{n+1} Q_1^n,$$

relation identique à la formule (11) et qui prouve que les fractions $\frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}}$, $\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n}$ sont irréductibles.

10. Considérons les relations

$$\begin{aligned}
Q_0^{n+1} &= \lambda_n \quad Q_0^n \quad - Q_0^{n-1},\\
Q_0^n \quad &= \lambda_{n-1} Q_0^{n-1} - Q_0^{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Q_0^3 \quad &= \lambda_1 Q_0^2 - Q_0^1,\\
Q_0^2 \quad &= \lambda_1 Q_0^1 - Q_0^0 = \lambda_1 Q_0^1 = \lambda_1;
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n} = \lambda_n - \cfrac{1}{\lambda_{n-1} - \cfrac{1}{\lambda_{n-2} - \ldots - \cfrac{1}{\lambda_2 - \cfrac{1}{\lambda_1}}}},$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad \frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n} = (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1).$$

La suite des λ est la même que dans la formule (14), mais elle est écrite dans un ordre inverse.

11. Posons

$$\Omega = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega).$$

Il est clair que l'on aura également

$$-\Omega = (-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{n-1}, -\lambda_n, -\omega),$$

$$-\frac{1}{\Omega} = (0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega).$$

Si k est un nombre entier quelconque, positif ou négatif, on aura évidemment

$$k \pm \Omega = (k \pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \pm \lambda_3, \ldots, \pm \lambda_{n-1}, \pm \lambda_n, \pm \omega),$$

$$(k, \Omega) = \left(k - \frac{1}{\Omega}\right) = (k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega).$$

Dès lors, on déduira successivement

$$(0, -\lambda_1 + \Omega) = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega),$$

$$(0, -\lambda_2, -\lambda_1 + \Omega) = (\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega),$$

$$(0, -\lambda_3, -\lambda_2, -\lambda_1 + \Omega) = (\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega),$$

et, par suite,

$$\omega = (0, -\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \ldots, -\lambda_3, -\lambda_2, -\lambda_1 + \Omega),$$

c'est-à-dire

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} = (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1 - \Omega), \\[2ex] \dfrac{1}{\omega} = \left(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \dfrac{1}{\Omega}\right). \end{cases}$$

Nous retrouverons plus loin cette relation symbolique qui constitue un théorème important sur la réversibilité des quotients complets.

12. Supposons que l'on nous demande la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$a_1 X - a_0 Y = M a_n.$$

Il est clair, d'après ce qui précède, que la solution générale sera donnée par les formules

$$(17)\qquad \begin{cases} X = MQ_0^n + NQ_0^{n+1}, \\ Y = MQ_1^n + NQ_1^{n+1}. \end{cases}$$

Nous croyons inutile de donner des applications de ces formules classiques.

13. Admettons maintenant que a_0 et a_1 soient incommensurables; dans ce cas, a_n diminue indéfiniment en valeur absolue sans jamais devenir nul.

Nous avons la relation

$$a_0 = a_n Q_0^{n+1} - a_{n+1} Q_0^n = a_n a_{n+1}\left(\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{Q_0^n}{a_n}\right),$$

d'où l'on déduit successivement

$$\begin{aligned}
\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{Q_0^n}{a_n} &= \frac{a_0}{a_n a_{n+1}}, \\
\frac{Q_0^n}{a_n} - \frac{Q_0^{n-1}}{a_{n-1}} &= \frac{a_0}{a_{n-1} a_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{Q_0^2}{a_2} - \frac{Q_0^1}{a_1} &= \frac{a_0}{a_1 a_2}, \\
\frac{Q_0^1}{a_1} &= \frac{a_0}{a_0 a_1},
\end{aligned}$$

d'où, en additionnant,

$$\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} = a_0\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_0 a_1}\right).$$

Dans la parenthèse, le quotient d'un terme $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ par le suivant $\frac{1}{a_{k-1} a_k}$ est égal à $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$; or, nous avons

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \lambda_k - \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

soient

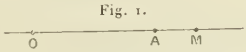
$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \overline{OM}, \qquad \lambda_k = \overline{OA}, \qquad -\frac{a_{k+1}}{a_k} = \overline{AM}.$$

Nous aurons

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| = \frac{OM}{AM}.$$

Ce rapport diminue quand M s'éloigne de A, c'est-à-dire quand AM

Fig. 1.



croît en valeur absolue. Or, le maximum de AM est $\frac{1}{2}$, et comme, d'autre part,

$$|\lambda_k| = OA \geqq 2,$$

il viendra

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| > \frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} > 5.$$

Dès lors, la parenthèse ci-dessus aura un module inférieur à

$$\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right| \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|.$$

Pour la même raison, cette parenthèse aura un module supérieur à

$$\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right| - \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_{n-1} a_n}\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| \left\{\left|\frac{1}{a_{n+1}}\right| - \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_{n-1}}\right|\right\},$$

et comme

$$|a_{n-1}| > 5\,|a_{n+1}|,$$

ce module sera finalement supérieur à

$$\frac{3}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|.$$

En résumé, on aura

$$\frac{3}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right| < \left|\frac{Q_0^{n+1}}{a_0 a_{n+1}}\right| < \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|,$$

d'où la relation fondamentale

$$(18) \qquad \frac{3}{4}|a_0| < |a_n Q_0^{n+1}| < \frac{5}{4}|a_0|.$$

Nous avons

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{5}|a_n|,$$

d'où, en multipliant membre à membre avec (18),

$$(19) \qquad |a_{n+2} Q_0^{n+1}| < \frac{1}{4}|a_0|.$$

De même,

$$|a_{n+4}| < \frac{1}{2}|a_n|,$$

d'où, en multipliant membre à membre avec (18),

$$(20) \qquad |a_{n+4} Q_0^{n+1}| < \frac{5}{8}|a_0|.$$

Si l'on avait

$$|a_{n+1}| < \frac{1}{\sqrt{5}}|a_n|,$$

on en tirerait

$$(21) \qquad |a_{n+4} Q_0^{n+1}| < \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0|,$$

mais comme

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{5}|a_n| \qquad \text{et} \qquad |a_{n+4}| < \frac{1}{5}|a_{n+1}|,$$

si l'on a

$$|a_{n+1}| > \frac{1}{\sqrt{5}}|a_n|,$$

on aura sûrement

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{\sqrt{5}}|a_{n+1}| \qquad \text{et} \qquad |a_n| < \frac{1}{\sqrt{5}}|a_{n-1}|.$$

Par suite, si

$$|a_{n+1}Q_0^{n+1}| > \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0|,$$

on aura sûrement

$$|a_{n+2}Q_0^{n+2}| < \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0| \qquad \text{et} \qquad |a_nQ_0^n| < \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0|.$$

Enfin, des relations ci-dessus,

$$|a_nQ_0^{n+1}| > \frac{3}{4}|a_0|, \qquad |a_nQ_0^n| < \frac{5}{8}|a_0|, \qquad |a_nQ_0^{n-1}| < \frac{1}{4}|a_0|,$$

on tire, en divisant membre à membre,

$$(22) \qquad \left|\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n}\right| > \frac{6}{5}, \qquad \left|\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^{n-1}}\right| > 3,$$

ce qui montre que Q_0^n augmente indéfiniment avec n.

14. Considérons maintenant la relation

$$a_n = a_1Q_0^n - a_0Q_1^n,$$

d'où

$$\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1} = \Delta_n = \frac{a_n}{a_1Q_1^n}.$$

On aura, d'après (20),

$$(23) \qquad |\Delta_n| = \left|\frac{a_n}{a_1Q_1^n}\right| = \left|\frac{a_n^2}{a_1a_nQ_1^n}\right| < \frac{8}{5}\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^2.$$

Or, a_n décroît au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; il en résulte que la différence $|\Delta_n|$ décroît

au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$; par suite, $|\Delta_n|$ a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment et $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}$ a pour limite $\frac{a_0}{a_1}$: c'est la généralisation de la formule (14). Nous avons trouvé

$$\Delta_n = \frac{a_n}{a_1 Q_1^n}, \qquad \Delta_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_1 Q_1^{n+1}},$$

d'où

$$\left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| = \left|\frac{a_n Q_1^{n+1}}{a_{n+1} Q_1^n}\right|;$$

or, d'après (18) et (19),

$$|a_n Q_0^{n+1}| > \frac{3}{4}|a_1|, \qquad |a_{n+1} Q_1^n| < \frac{1}{4}|a_1|,$$

d'où

$$\left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| > 3; \tag{24}$$

c'est là une propriété caractéristique de l'approximation obtenue avec les fractions successives $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}, \frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}}, \ldots$.

15. Une autre propriété de ces fractions, qui leur a fait donner le nom de *réduites*, est la suivante : Si une fraction irréductible à coefficients entiers $\frac{A}{B}$ est telle que l'on ait

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| < \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right|,$$

on ne peut pas avoir

$$|B| < |Q_1^n|.$$

En effet, admettons que les inégalités ci-dessus aient lieu, il viendra

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{Q_0^n}{Q_1^n}\right| \leqq \left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| + \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right| < 2\left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right| < 2\left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right|,$$

d'où, en chassant les dénominateurs et d'après (20),

$$|AQ_1^n - BQ_0^n| < 2\left|\frac{Ba_n}{a_1}\right| < 2\left|\frac{a_n Q_1^n}{a_1}\right| < \frac{5}{4}.$$

Or, le premier membre, qui est un nombre entier, ne peut être égal à zéro, car on en tirerait

$$\frac{A}{B} = \frac{Q_0^n}{Q_1^n},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Je dis également que l'on ne peut avoir

$$AQ_1^n - BQ_0^n = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On en déduirait, d'après (17),

$$A = \varepsilon Q_0^{n-1} + kQ_0^n, \qquad B = \varepsilon Q_1^{n-1} + kQ_1^n,$$

d'où

$$\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1} = \frac{\varepsilon Q_0^{n-1} + kQ_0^n}{\varepsilon Q_1^{n-1} + kQ_1^n} - \frac{a_0}{a_1} = \frac{\varepsilon a_{n-1} + ka_n}{Ba_1}.$$

Or, si l'on veut que $|B| < |Q_1^n|$, il faut nécessairement prendre, soit $k = 0$, soit $k = \varepsilon'$ $(\varepsilon' = \pm 1)$.

Dans le premier cas, on a

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| = \left|\frac{\varepsilon a_{n-1}}{Ba_1}\right| > \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| > \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right|.$$

Dans le second cas il vient, en tenant compte de $|a_{n-1}| > 2|a_n|$,

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| = \left|\frac{\varepsilon a_{n-1} + \varepsilon' a_n}{Ba_1}\right| > \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| > \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right|,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition annoncée est donc démontrée.

16. Considérons les relations

$$a_0 = a_n Q_0^{n+1} - a_{n+1} Q_0^n,$$
$$a_1 = a_n Q_1^{n+1} - a_{n+1} Q_1^n,$$

d'où, en divisant,

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\frac{a_n}{a_{n+1}} Q_0^{n+1} - Q_0^n}{\frac{a_n}{a_{n+1}} Q_1^{n+1} - Q_1^n}. \tag{25}$$

Il en résulte que la condition nécessaire pour que la réduction en fraction continue de $\frac{a_0}{a_1}$ donne $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ parmi les quotients complets est que la relation (25) ait lieu. Dans cette formule, Q_0^{n+1}, Q_1^{n+1} peuvent être pris arbitrairement : Q_0^n, Q_1^n s'en déduisent immédiatement par la réduction en fraction continue de $\frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}}$.

Cette condition est également suffisante, car si nous avons

$$\frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n),$$

d'où

$$\frac{Q_0^n}{Q_1^n} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}),$$

on aura évidemment, si (25) a lieu,

$$(25') \qquad \frac{a_0}{a_1} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

La relation (25) s'écrit également

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_1}{a_0} Q_0^{n+1} - Q_1^{n+1}}{\frac{a_1}{a_0} Q_0^n - Q_1^n},$$

d'où l'on tirera, par le même procédé que ci-dessus,

$$(25'') \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots \lambda_2, \lambda_1, \frac{a_1}{a_0}\right),$$

relation identique à la formule (16).

La formule (25) est susceptible de généralisation, car, d'après (12), on a

$$a_{i+n} Q_i^k = a_i Q_{i+n}^k - a_k Q_{i+n}^i,$$
$$a_{i+m} Q_i^k = a_i Q_{i+m}^k - a_k Q_{i+m}^i,$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+m}} = \frac{\frac{a_i}{a_k} Q_{i+n}^k - Q_{i+n}^i}{\frac{a_i}{a_k} Q_{i+m}^k - Q_{i+m}^i}.$$

Rappelons que le déterminant

$$\begin{vmatrix} Q_{i+n}^{k} & Q_{i+n}^{i} \\ Q_{i+m}^{k} & Q_{i+m}^{i} \end{vmatrix}$$

est égal à

$$Q_{k}^{i}\, Q_{i+n}^{i+m}$$

et ne devient égal à ± 1 que si l'on a à la fois

$$i = k \pm 1, \qquad m = n \pm 1,$$

c'est-à-dire dans le cas que nous avons examiné précédemment.

Nous dirons avec Dedekind (*Journal de Crelle*, t. 83, 1877) que, si l'on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \frac{a_0}{a_1}\right),$$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ et $\frac{a_0}{a_1}$ sont *équivalents*.

Nous allons rechercher la condition pour que deux nombres $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, $\frac{b_m}{b_{m+1}}$ soient équivalents à $\frac{a_0}{a_1}$; auquel cas, *par définition*, nous dirons qu'ils sont équivalents entre eux.

Nous avons

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\frac{a_n}{a_{n+1}} Q_0^{n+1} - Q_0^n}{\frac{a_n}{a_{n+1}} Q_1^{n+1} - Q_1^n} = \frac{\frac{b_m}{b_{m+1}} P_0^{m+1} - P_0^m}{\frac{b_m}{b_{m+1}} P_1^{m+1} - P_1^m},$$

d'où

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{b_m}{b_{m+1}} \begin{vmatrix} Q_0^{n+1} & Q_1^{n+1} \\ P_0^{m+1} & P_1^{m+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Q_0^{n+1} & Q_1^{n+1} \\ P_0^{m} & P_1^{m} \end{vmatrix}}{\frac{b_m}{b_{m+1}} \begin{vmatrix} Q_0^{n} & Q_1^{n} \\ P_0^{m+1} & P_1^{m+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Q_0^{n} & Q_1^{n} \\ P_0^{m} & P_1^{m} \end{vmatrix}} = \frac{A \frac{b_m}{b_{m+1}} - B}{C \frac{b_m}{b_{m+1}} - D},$$

et nous avons, d'après une propriété connue des déterminants,

$$BC - AD = \begin{vmatrix} Q_0^n & Q_0^{n+1} \\ Q_1^n & Q_1^{n+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_0^m & P_0^{m+1} \\ P_1^m & P_1^{m+1} \end{vmatrix} = 1;$$

c'est là une condition nécessaire; je dis qu'elle est suffisante.

En effet, A et C étant premiers entre eux, nous pouvons poser

$$A = R_0^{k+1}, \qquad C = R_1^{k+1},$$

d'où, d'après (17),

$$B = R_0^k - \mu R_0^{k+1}, \qquad D = R_1^k + \mu R_1^{k+1},$$

d'où il vient

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{b_m}{b_{m+1}} R_0^{k+1} - R_0^k - \mu R_0^{k+1}}{\frac{b_m}{b_{m+1}} R_1^{k+1} - R_1^k - \mu R_1^{k+1}} = \frac{R_0^{k+1}\left(\frac{b_m}{b_{m+1}} - \mu\right) - R_0^k}{R_1^{k+1}\left(\frac{b_m}{b_{m+1}} - \mu\right) - R_1^k};$$

d'où l'on déduit que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est équivalent à $\frac{b_m}{b_{m+1}} - \mu$ et par conséquent aussi à $\frac{b_m}{b_{m+1}}$.

II. — Théorème de Lagrange.

17. Considérons une équation du second degré à coefficients entiers et à racines réelles

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad \text{avec} \qquad B^2 - 4AC = \Delta > 0.$$

Soit $x = \frac{a_0}{a_1}$ une des deux racines que nous supposerons avoir un module > 1; si aucune des deux racines ne remplissait cette condition, nous considérerions l'équation aux inverses. Nous allons réduire en fraction continue cette racine $\frac{a_0}{a_1}$; nous avons tout d'abord

$$Aa_0^2 + Ba_0a_1 + Ca_1^2 = 0.$$

D'ailleurs,

$$a_0 = a_n Q_0^{n+1} - a_{n+1} Q_0^n,$$
$$a_1 = a_n Q_1^{n+1} - a_{n+1} Q_1^n.$$

En substituant, nous obtenons une équation de la forme

$$La_n^2 + Ma_na_{n+1} + Na_{n+1}^2 = 0$$

avec

$$(26)\quad \begin{cases} L = A(Q_0^{n+1})^2 + BQ_0^{n+1}Q_1^{n+1} + C(Q_1^{n+1})^2, \\ M = -2AQ_0^{n+1}Q_0^n - B(Q_0^{n+1}Q_1^n + Q_1^{n+1}Q_0^n) - 2CQ_1^{n+1}Q_1^n, \\ N = A(Q_0^n)^2 + BQ_0^nQ_1^n + C(Q_1^n)^2. \end{cases}$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$(26')\qquad M^2 - 4LN = B^2 - 4AC = \Delta,$$

car il suffit de tenir compte de la relation (11),

$$1 = Q_0^nQ_1^{n+1} - Q_0^{n+1}Q_1^n.$$

D'autre part, si nous exprimons a_n, a_{n+1} en fonction de a_0, a_1 au moyen des formules

$$a_n = a_1Q_0^n - a_0Q_1^n, \qquad a_{n+1} = a_1Q_0^{n+1} - a_0Q_1^{n+1},$$

il vient, en identifiant,

$$(26'')\quad \begin{cases} A = L(Q_1^n)^2 + MQ_1^nQ_1^{n+1} + N(Q_1^{n+1})^2, \\ B = -2LQ_1^nQ_0^n - M(Q_0^nQ_1^{n+1} + Q_0^{n+1}Q_1^n) - 2NQ_1^{n+1}Q_0^{n+1}, \\ C = L(Q_0^n)^2 + MQ_0^nQ_0^{n+1} + N(Q_0^{n+1})^2; \end{cases}$$

d'où il résulte que si A, B, C ont un diviseur commun, il en sera de même de L, M, N, et réciproquement. Nous supposerons tout d'abord que A, B, C sont premiers entre eux.

Dans (26) nous allons remplacer Q_1^{n+1} et Q_1^n par leur valeur

$$\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}, \quad \frac{a_1Q_0^n - a_n}{a_0},$$

il viendra

$$\begin{aligned} L = {} & A(Q_0^{n+1})^2 + BQ_0^{n+1}\left(\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right) + C\left(\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right) \\ & - \frac{(Q_0^{n+1})^2}{a_0^2}(Aa_0^2 + Ba_0a_1 + Ca_1^2) \\ & - \frac{Q_0^{n+1}}{a_0^2}(2Ca_1 + Ba_0)a_{n+1} + C\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$Aa_0^2 + Ba_0a_1 + Ca_1^2 = 0;$$

d'où

$$4ACa_0^2 + 4BCa_0a_1 + 4C^2a_1^2 = 0,$$

$$(2Ca_1 + Ba_0)^2 = (B^2 - 4AC)a_0^2 = \Delta a_0^2,$$

par suite

$$2Ca_1 + Ba_0 = a_0\sqrt{\Delta}.$$

En substituant, il vient

$$L = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}a_{n+1}Q_0^{n+1} + C\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right)^2.$$

D'après (20), nous avons

$$|a_{n+1}Q_0^{n+1}| < \frac{5}{8}|a_0|;$$

d'autre part, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_0}\right|$ diminue au delà de toute limite, c'est-à-dire que, à condition de prendre n assez grand, nous pouvons supposer

$$\left|C\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right)^2\right| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité finie donnée *a priori* et aussi petite qu'on voudra.

Dans ces conditions on aura

$$(27) \qquad |L| < \frac{5}{8}\sqrt{\Delta}.$$

Il en sera de même pour $|N|$, car, dans le calcul qui précède, il suffira de changer $n+1$ en n; de plus, la formule (21) prouve que l'un au moins de ces deux coefficients, L ou N, est plus petit en valeur absolue que $\frac{\sqrt{5\Delta}}{4}$ (27').

En ce qui concerne M, nous avons :

$$\begin{aligned} M = &-2AQ_0^{n+1}Q_0^n - B\left[Q_0^{n+1}\left(\frac{a_1Q_0^n - a_n}{a_0}\right) + Q_0^n\left(\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right)\right] \\ &- 2C\left(\frac{a_1Q_0^n - a_n}{a_0}\right)\left(\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right) \\ = &-\frac{2Q_0^nQ_0^{n+1}}{a_0^2}(Aa_0^2 + Ba_0a_1 + Ca_1^2) \\ &+ \frac{2Ca_1 + Ba_0}{a_0^2}(a_nQ_0^{n+1} + a_{n+1}Q_0^n) - \frac{2Ca_na_{n+1}}{a_0^2}. \end{aligned}$$

En réduisant comme précédemment

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}(a_n Q_0^{n+1} + a_{n+1} Q_0^n) - 2C\frac{a_n a_{n+1}}{a_0^2}.$$

Le dernier terme diminue au delà de toute limite; d'ailleurs, d'après (18) et (19) on a

$$\frac{3}{4}|a_0| < |a_n Q_0^{n+1}| < \frac{5}{4}|a_0|, \qquad |a_{n+1} Q_0^n| < \frac{1}{4}|a_0|,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} < |M| < \frac{3}{2}\sqrt{\Delta}. \tag{28}$$

Les valeurs absolues des coefficients L, M, N étant limitées, il est clair que, au bout d'un nombre fini d'opérations, on retombera soit sur l'équation qui a servi de point de départ, soit sur une équation déjà considérée; dans tous les cas, la suite des équations sera périodique : simple dans le premier cas, mixte dans le second. Par suite, le développement en fraction continue de $\frac{a_0}{a_1}$ sera également périodique, simple ou mixte, suivant le cas.

En effet, admettons que la période ait m termes et soit

$$A_{i+1}x^2 + B_i x + A_i = 0$$

une des m équations périodiques dans laquelle nous avons fait

$$x = \frac{a_k}{a_{k+i}}.$$

Nous avons, d'après les relations obtenues ci-dessus,

$$A_{i+1} = \lim -\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0} a_{n+1} Q_0^{n+1},$$

$$B_i = \lim \frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}(a_n Q_0^{n+1} + a_{n+1} Q_0^n),$$

$$A_i = \lim -\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0} a_n Q_0^n;$$

par suite, l'équation ci-dessus devient

$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}\left[a_{n+1}Q_0^{n+1}x^2-(a_nQ_0^{n+1}+a_{n+1}Q_0^n)x+a_nQ_0^n\right]=0,$$

dans laquelle il faut faire croître n indéfiniment.

En résolvant, on trouve deux racines : l'une

$$\omega_k=\lim\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

l'autre

$$\omega_k^1=\lim\frac{Q_0^n}{Q_0^{n+1}}.$$

La première a un module supérieur à 2 ; la seconde, d'après (22), a un module inférieur à $\frac{5}{6}$. Si donc ces équations se reproduisent périodiquement, il en est de même des racines qui, limitées en valeur absolue, ne peuvent s'échanger entre elles.

En d'autres termes, la suite des $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est périodique : simple si l'on retombe sur $\frac{a_0}{a_1}$, mixte si l'on retombe sur $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ $(i\neq 0)$.

Le théorème de Lagrange est ainsi démontré et précisé, car nous avons déterminé, en dehors de toute hypothèse, les limites que ne peuvent dépasser les modules des coefficients L, M, N.

18. Considérons l'équation périodique ci-dessus

$$A_{i+1}x^2+B_ix+A_i=0.$$

Nous dirons que le premier membre de cette équation est une *forme réduite* et que la racine $\omega_i=\frac{a_i}{a_{i+1}}$ de module >2 est un *nombre réduit*.

Nous obtenons ainsi tout d'abord m formes réduites et m nombres réduits équivalents au sens de Dedekind.

D'après ce que nous avons vu précédemment, on aura

$$\omega_{i+km}=\frac{a_{i+km}}{a_{i+km+1}}=\omega_{i+m}=\frac{a_{i+m}}{a_{i+m+1}}=\frac{a_i}{a_{i+1}}=\omega_i;$$

par suite, il viendra

$$\frac{a_i}{a_{i+m}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+m+1}} = \lambda$$

$$\frac{a_i}{a_{i+km}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+km+1}} = \lambda^k,$$

et le nombre λ est visiblement indépendant de i. Or nous avons

$$a_i = a_{i+km}\,Q_i^{i+km+1} - a_{i+km+1}\,Q_i^{i+km},$$

$$a_{i+1} = a_{i+km}\,Q_{i+1}^{i+km+1} - a_{i+km+1}\,Q_{i+1}^{i+km}.$$

Par suite, en divisant,

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \omega_i = \frac{\omega_{i+km}\,Q_i^{i+km+1} - Q_i^{i+km}}{\omega_{i+km}\,Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km}} = \frac{\omega_i\,Q_i^{i+km+1} - Q_i^{i+km}}{\omega_i\,Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km}},$$

d'où l'équation du second degré à laquelle satisfait ω_i,

$$(29) \qquad Q_{i+1}^{i+km+1}\,\omega_i^2 - (Q_{i+1}^{i+km} + Q_i^{i+km+1})\,\omega_i + Q_i^{i+km} = 0.$$

En ne prenant qu'une période ($k = 1$), si nous posons

$$\frac{Q_i^{i+m+1}}{Q_{i+1}^{i+m+1}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

il viendra, d'après (25′),

$$\omega_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \omega_i).$$

L'équation ci-dessus a une seconde racine ω_i' de module $< \frac{5}{6}$, et comme on peut écrire

$$\frac{1}{\omega_i'} = \frac{\frac{1}{\omega_i'}\,Q_i^{i+m+1} - Q_{i+1}^{i+m+1}}{\frac{1}{\omega_i'}\,Q_i^{i+m} - Q_{i+1}^{i+m}},$$

on aura, d'après (25″),

$$\frac{1}{\omega_i'} = \left(\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\omega_i'}\right).$$

Nous obtenons ainsi le développement en fraction continue de ω_i et

de ω'_i; toutefois, il y a lieu de remarquer que ce dernier développement peut n'avoir qu'une signification formelle.

Nous avons vu, en effet, que si

$$|\lambda_j| = 2,$$

a_{j-1} et a_{j+1} sont de signe contraire, et comme λ_{j+1} est l'entier le plus rapproché de $\frac{a_j}{a_{j+1}}$, il sera évidemment d'un signe contraire à λ_j, qui est l'entier le plus rapproché de $\frac{a_{j-1}}{a_j}$.

Dès lors, si, dans le développement de ω_i, λ_{j-1} n'est pas d'un signe contraire à λ_j,

$$|\lambda_j| = 2,$$

il en résultera que le développement de $\frac{1}{\omega'_i}$ obtenu par le renversement de la période, quoique exact, différera de celui auquel on serait conduit par la réduction directe en fraction continue de $\frac{1}{\omega'_i}$.

Dans tous les cas, la réduction de la racine conjuguée donnera naissance à m nouveaux nombres réduits qui, *en général*, différeront des précédents; au contraire, ces nombres réduits correspondront *en général* à des formes réduites déjà envisagées, sauf le changement de x en $\frac{1}{x}$.

Enfin, en changeant de signe ω_i et $\frac{1}{\omega'_i}$ on obtiendra des formules réduites qui ne différeront des précédentes que par le changement de signe de B_i et $2m$ nouveaux nombres réduits dont le développement différera *en général* des précédents; on aura ainsi $4m$ nombres réduits qu'on peut considérer comme *dérivés* du nombre réduit dont on est parti; nous verrons plus loin dans quels cas ce nombre se ramène à $2m$ ou à m.

19. Reprenons l'équation réduite

$$A_{i+1}x^2 + B_i x + A_i = 0,$$

qui se transforme en (29),

$$Q_{i+1}^{i+km+1}\,\omega_i^2 - (Q_{i+1}^{i+km} + Q_i^{i+km+1})\,\omega_i + Q_i^{i+km} = 0.$$

Par hypothèse, les coefficients de l'équation réduite n'ont pas de diviseur commun; on aura donc, en identifiant et en appelant u_k le diviseur commun des coefficients de (29),

$$\frac{Q_{i+1}^{i+km+1}}{A_{i+1}} = \frac{-(Q_i^{i+km+1} + Q_{i+1}^{i+km})}{B_i} = \frac{Q_i^{i+km}}{A_i} = u_k,$$

d'où, en posant

$$Q_i^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km} = t_k,$$

il vient

$$Q_{i+1}^{i+km+1} = A_{i+1}\,u_k, \qquad Q_i^{i+km+1} = \frac{t_k - B_i\,u_k}{2},$$

$$Q_i^{i+km} = A_i\,u_k, \qquad Q_{i+1}^{i+km} = \frac{t_k + B_i\,u_k}{2},$$

et, en substituant dans

$$Q_i^{i+km}\,Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_i^{i+km+1}\,Q_{i+1}^{i+km} = 1,$$

on aura

$$(4A_iA_{i+1} - B_i^2)\,u_k + t_k^2 = 4,$$

ou

$$t_k^2 - \Delta u_k^2 = 4. \tag{30}$$

Nous obtenons ainsi une solution de l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = 4, \tag{30'}$$

connue sous le nom d'*équation de Pell*.

Pour interpréter cette solution, rappelons la relation du numéro précédent :

$$\frac{a_i}{a_{i+km}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+km+1}} = \lambda^k.$$

Nous aurons

$$\frac{a_{i+km}\,Q_i^{i+km+1} - a_{i+km+1}\,Q_i^{i+km}}{a_{i+km}} = \frac{a_{i+km}\,Q_{i+1}^{i+km+1} - a_{i+m+1}\,Q_{i+1}^{i+km}}{a_{i+km+1}} = \lambda^k,$$

d'où

$$a_{i+km}(Q_i^{i+km+1} - \lambda^k) = a_{i+km+1}(Q_i^{i+km}),$$
$$a_{i+km}(Q_{i+1}^{i+km+1}) \qquad = a_{i+km+1}(Q_{i+1}^{i+km} + \lambda^k),$$

et en éliminant il vient

$$(\lambda^k)^2 - (Q_i^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km})\lambda^k + Q_i^{i+km}Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km}Q_i^{i+km+1} = 0$$

ou

$$(\lambda^k)^2 - t_k\lambda^k + 1 = 0,$$

et, par suite,

$$(31) \qquad \lambda^k = \frac{t_k \pm \sqrt{t_k^2 - 4}}{2} = \frac{t_k \pm u_k\sqrt{5}}{2}.$$

Nous obtenons ainsi des solutions qui sont toutes des puissances positives ou négatives de l'une d'entre elles. On démontrerait d'ailleurs aisément que l'équation (30) ne comporte pas d'autre solution en dehors de celles que nous venons de définir (*voir* Weber, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 470).

20. Examinons maintenant le cas où une racine ω_i est équivalente à $\frac{1}{\omega_i'}$, partant à $-\omega_i'$. Puisque

$$\omega_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1}, \lambda_m, \omega_i),$$
$$\frac{1}{\omega_i'} = \left(\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\omega_i'}\right),$$

il faut pour cela que la suite indéfinie

$$\ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

soit réversible, c'est-à-dire symétrique par rapport à un terme ou à l'intervalle compris entre deux termes consécutifs :

1° Dans le premier cas on aura, en appelant λ_j le terme par rapport auquel la suite indéfinie est symétrique,

$$\lambda_{j-1} = \lambda_{j+1}, \qquad \lambda_{j-2} = \lambda_{j+2}, \qquad \ldots$$

On aura donc

$$\omega_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}\, \omega_j),$$

d'où

$$-\frac{1}{\omega_j - \lambda_j} = (\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \omega_j);$$

or, on a

$$\frac{1}{\omega'_j} = \left(\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \ldots, \lambda_{j+2}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \frac{1}{\omega'_j}\right),$$

d'où, en tenant compte des égalités ci-dessus,

$$\frac{1}{\omega'_j} = -\frac{1}{\omega_j - \lambda_j} \qquad \text{et} \qquad \omega_j + \omega'_j = \lambda_j.$$

La somme du nombre réduit et de son conjugué est égale à un nombre entier λ_j; en d'autres termes, dans la forme réduite correspondante

$$A_{j+1}x^2 + B_j x + A_j = 0,$$

on a

$$B_j = \lambda_j A_{j+1}. \tag{32}$$

2° Dans le second cas, on aura

$$\lambda_j = \lambda_{j-1}, \qquad \lambda_{j+1} = \lambda_{j-2}, \qquad \lambda_{j+2} = \lambda_{j-3}, \qquad \ldots,$$

par suite,

$$\omega_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \omega_j)$$

et

$$\frac{1}{\omega'_j} = \left(\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \ldots, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \frac{1}{\omega'_j}\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_j = \frac{1}{\omega'_j}, \qquad \omega_j \omega'_j = 1.$$

Il existe donc un nombre réduit tel que le produit de ce nombre par le conjugué donne l'unité; en d'autres termes, si l'on considère la

forme réduite correspondante

$$A_{j+1}x^2 + B_j x + A_j = 0,$$

on aura

$$A_{j+1} = A_j. \tag{33}$$

21. Les nombres réduits satisfaisant aux conditions qui précèdent ont reçu les dénominations d'*anceps* (Gauss), d'*ambigus* (Dirichlet) et de *bilatères* (Dedekind).

Dans le premier cas, nous avons

$$A_{j+1}x^2 + \lambda_j A_{j+1} x + A_j = 0,$$

d'où

$$x = -\lambda_j \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{A_{j+1}},$$

et nous voyons que x est équivalent à une fraction de $\sqrt{\Delta}$; nous dirons plus simplement que le nombre réduit considéré est une *fraction*.

Dans le second cas, nous avons

$$A_j x^2 + B_j x + A_j = 0,$$

et nous dirons que x est une *pseudo-unité*. Nous avons vu, en effet, plus haut, que pour $A_j = 1$ on obtient une équation

$$x^2 - B_j x + 1 = 0$$

dont la solution $\frac{t_k \pm u_k\sqrt{\Delta}}{2}$ peut être considérée comme une *unité* appartenant à $u_k\sqrt{\Delta}$ (*voir* Weber, p. 469).

Les fractions et les pseudo-unités étant ainsi définies, on voit que si le nombre des termes de la période du développement de ω_i est impair on aura certainement parmi les nombres réduits une fraction et une pseudo-unité; si, au contraire, le nombre des termes est pair, on pourra avoir parmi les nombres réduits soit deux fractions, soit deux

pseudo-unités; toutefois, si la période a deux termes, on aura nécessairement deux fractions [1].

Si la période n'a qu'un terme, on aura l'*unité* comme seul nombre réduit $\left(U = \frac{t_k \pm u_k\sqrt{\Delta}}{2}\right)$.

22. Examinons le cas où ω_i est équivalent à $-\frac{1}{\omega_i'}$, partant à ω_i'. Dans ce cas, la suite indéfinie

$$\ldots, \quad \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \quad \ldots$$

devra être telle que l'on ait

$$\lambda_j = -\lambda_{j-1}, \qquad \lambda_{j+1} = -\lambda_{j-2}, \qquad \lambda_{j+2} = -\lambda_{j-3}, \quad \ldots.$$

Le premier cas du numéro précédent ne peut se présenter, car on devrait avoir $\lambda_j = 0$, ce qui est contraire à la condition $|\lambda_j| \geqq 2$.

On aura donc

$$\omega_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \omega_j)$$

et

$$\frac{1}{\omega_j'} = \left(\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \ldots, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \frac{1}{\omega_j'}\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_j = -\frac{1}{\omega_j'} \qquad \text{et} \qquad \omega_j\omega_j' = -1.$$

La forme réduite correspondante sera

$$(34) \qquad A_j x^2 + B_j x - A_j = 0.$$

Nous appellerons *pseudo-unité négative* le nombre réduit ainsi obtenu et nous ferons simplement remarquer que la période du déve-

---

[1] En réalité, le cas de $m = 2$ est un cas exceptionnel, car on a en outre

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega_2'}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\omega_1'},$$

et, comme forme réduite correspondante,

$$Ax^2 - AB\,x + B = 0.$$

loppement qui lui correspond comprend nécessairement un nombre pair de termes.

23. Examinons enfin le cas où ω_i est équivalent à $-\omega_i$.

Dans ce cas, il faut nécessairement que la période se compose de deux demi-périodes telles que la seconde soit identique à la première changée de signe

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{2k})$$

avec

$$\lambda_1 = -\lambda_{k+1}, \qquad \lambda_2 = -\lambda_{k+2}, \qquad \ldots \qquad \lambda_k = -\lambda_{2k}.$$

On a alors évidemment

$$\omega_i = -(\omega_{i+(2n+1)k}),$$

et il vient

$$\omega_i = \frac{-\omega_i Q_i^{(i+2n+1)k+1} - Q_i^{(i+(2n+1)k}}{-\omega_i Q_{i+1}^{(i+2n+1)k+1} - Q_{i+1}^{(i+2n+1)k}},$$

d'où

$$Q_{i+1}^{(i+2n+1)k+1}\omega_2^i + (Q_{i+1}^{(i+2(n+1)k} - Q_i^{(i+(2n+1)k+1})\omega_i - Q_i^{(i+(2n+1)k} = 0,$$

et, en identifiant avec

$$A_{i+1}\omega_i^2 + B_i\omega_i + A_i = 0,$$

on aura

$$\frac{Q_{i+1}^{(i+2n+1)k+1}}{A_{i+1}} = \frac{Q_{i+1}^{(i+2n+1)k} - Q_i^{(i+2n+1)k+1}}{B_i} = \frac{-Q_i^{(i+(2n+1)k}}{A_i} = u_{2n+1},$$

d'où, en posant

$$Q_{i+1}^{(i+2n+1)k} + Q_i^{(i+(2n+1)k+1} = l_{2n+1},$$

il vient

$$Q_{i+1}^{(i+2n+1)k+1} = A_{i+1}u_{2n+1}, \qquad Q_{i+1}^{(i+2n+1)k} = \frac{l_{2n+1} + B_i u_{2n+1}}{2},$$

$$Q_i^{(i+2n+1)} = -A_i u_{2n+1}, \qquad Q_i^{(i+2n+1)k+1} = \frac{l_{2n+1} - B_i u_{2n+1}}{2},$$

et, en éliminant, en tenant compte de (11),

$$-4A_iA_{i+1}u_{2n+1}^2-(t_{2n+1}^2-B_i^2u_{2n+1}^2)=4$$

ou

$$t_{2n+1}^2-\Delta u_{2n+1}^2=-4. \tag{35}$$

Nous obtenons ainsi une solution de l'équation

$$t^2-\Delta u^2=-4 \tag{35'}$$

comparable à l'équation de Pell; nous saurons la résoudre toutes les fois que le développement de l'irrationnelle considérée remplira les conditions énumérées précédemment.

Nous dirons dans ce cas qu'il existe une *racine de l'unité* appartenant à $u_k\sqrt{\Delta}$; le carré d'une solution-unité de l'équation (35′) est, en effet, une solution-unité de l'équation (30′); c'est là l'explication de cette dénomination.

24. Il pourra arriver en dernier lieu que deux des hypothèses que nous venons d'examiner soient simultanément réalisées, c'est-à-dire que chacune des demi-périodes du numéro précédent donne lieu à une suite réversible.

Dans ce cas, le nombre des nombres réduits dérivés de ω_i sera évidemment ramené à m.

En résumé, d'après les formules (27) et (28), le nombre des formes réduites est limité; il en résulte qu'il en sera de même des nombres réduits.

Dans certains cas, quelques-uns de ces nombres jouiront de propriétés particulières et seront équivalents soit à leurs conjugués, soit à leurs conjugués changés de signe, soit enfin à eux-mêmes changés de signe. Ces nombres réduits spéciaux définiront en somme des classes de nombres réduits équivalents dont l'étude se rattache directement aux recherches mémorables de Dirichlet.

25. Étant donnée une irrationnelle quadratique quelconque, nous la réduirons en fraction continue et nous saurons déterminer facilement les $4m$ nombres réduits qui en dérivent.

Nous saurons donc trouver de cette manière si deux irrationnelles données sont équivalentes à un même nombre réduit et, partant, équivalentes entre elles.

Nous saurons enfin, et c'est le problème général que nous avions en vue, passer de l'une à l'autre de ces irrationnelles équivalentes par une substitution de la forme

$$\frac{Az - B}{Cz - D},$$

à coefficients entiers avec $BC - AD = 1$, autrement dit par une substitution *modulaire*.

Nous avons en effet, si Ω et Ω' sont équivalents à un nombre réduit ω,

$$\Omega = \frac{A\omega - B}{C\omega - D},$$

$$\omega = \frac{\omega Q_0^{km+1} - Q_0^{km}}{\omega Q_1^{km+1} - Q_1^{km}},$$

$$\omega = \frac{M\Omega' - N}{P\Omega' - Q}.$$

Ces trois formules résolvent entièrement la question.

Pour les applications numériques, nous renvoyons aux Traités classiques.

III. — Application aux nombres complexes.

26. Considérons deux nombres complexes quelconques a_i, a_{i+1} avec $|a_i| > |a_{i+1}|$.

En divisant a_i par a_{i+1}, nous pouvons prendre comme quotient approché l'entier imaginaire λ_{i+1} le plus voisin du quotient exact $\frac{a_i}{a_{i+1}}$.

En changeant de signe le reste, on aura

$$a_i = \lambda_{i+1} a_{i+1} - a_{i+2},$$

et, comme le module de la différence

$$\left| \frac{a_i}{a_{i+1}} - \lambda_{i+1} \right|$$

est inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on aura évidemment

$$|a_{i+2}| < \frac{\sqrt{2}}{2}|a_{i+1}|.$$

Nous pouvons de même diviser a_{i+1} par a_{i+2} :

$$a_{i+1} = \lambda_{i+2}a_{i+2} - a_{i+3}$$

avec

$$|a_{i+3}| < \frac{\sqrt{2}}{2}|a_{i+2}| < \frac{1}{2}|a_{i+1}|.$$

Les nombres positifs $|a_{i+1}|$, $|a_{i+2}|$, $|a_{i+3}|$, ... décroissent au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ils ont donc pour limite zéro.

De même que pour les fractions continues réelles, deux cas peuvent se présenter selon que la fraction $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ est commensurable ou incommensurable : dans le premier cas, a_{i+n+1} devient effectivement nul et a_{i+n} est le plus grand commun diviseur de a_i et a_{i+1} ; dans le second cas, a_{i+n+1} diminue indéfiniment en valeur absolue sans jamais cependant devenir nul, et il est clair dès lors que a_i et a_{i+1} ne peuvent avoir de diviseur commun, si petit qu'il soit.

27. D'après ce que nous avons dit précédemment, λ_{i+1} est l'entier complexe le plus rapproché du quotient exact $\frac{a_i}{a_{i+1}}$; il en résulte que le reste $\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ est de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$

avec les conditions

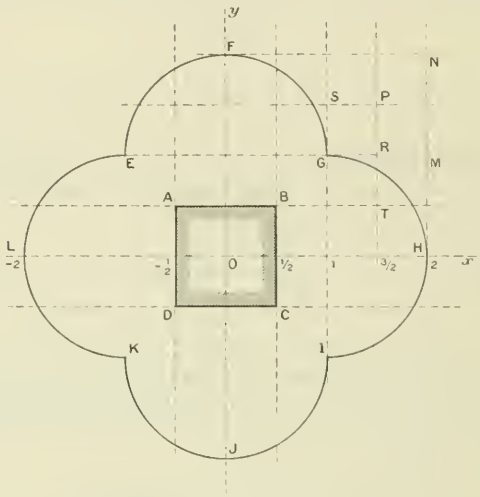
$$|\alpha| < \frac{1}{2}, \qquad |\beta| < \frac{1}{2}.$$

En d'autres termes, $\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ est *à l'intérieur* du carré formé par les droites

$$X = \pm\frac{1}{2}, \qquad Y = \pm\frac{1}{2}.$$

Par suite, l'inverse de ce quotient, soit $\frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$, sera *à l'extérieur* des cercles de rayon *un* passant par l'origine tangentiellement aux axes : nous avons indiqué ces deux zones sur la figure ci-dessous.

Fig. 2.



Il est clair, d'après cette figure, que $|\lambda_{i+1}| \geqq \sqrt{2}$; de plus, on voit que si $|\lambda_{i+1}|$ est égal à $\sqrt{2}$, 2 ou $\sqrt{5}$, ce qui correspond aux points G, H, M, le reste $\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ et, par conséquent, λ_{i+2}, qui est l'entier le plus rapproché de $\frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$, sont soumis à certaines restrictions que nous allons examiner.

1° Soit $\lambda_{n+1} = 1 + i$, ce qui correspond au point G.

— $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ sera, en supposant l'origine transportée au point G, à l'extérieur des arcs FG, GH, mais à l'intérieur des droites PS, PR, d'où il résulte, en prenant l'inverse et en changeant de signe, que $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$, et, par

suite aussi, λ_{n+2} seront de la forme

$$-A+Bi,$$

A et B positifs.

D'une manière générale, si

$$\lambda_{n+1}=\pm 1\pm i,$$

λ_{n+2} sera de la forme

$$\mp A\pm Bi, \qquad A>0, \qquad B>0.$$

2° Soit $\lambda_{n+1}=2$, ce qui correspond au point H; on voit aisément que λ_{n+2} sera de la forme

$$-A+Bi, \qquad A>0.$$

Si

$$\lambda_{n+1}=-2,$$

λ_{n+2} sera de la forme

$$A+Bi, \qquad A>0.$$

Si

$$\lambda_{n+1}=\pm 2i,$$

on aura de même

$$\lambda_{n+2}=A\pm Bi, \qquad B>0.$$

3° Soit $\lambda_{n+1}=2+i$, ce qui correspond au point M. En calculant comme ci-dessus la valeur inverse changée de signe de $-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, on trouve facilement que λ_{n+2} ne peut pas prendre la valeur $1-i$.

D'une manière générale, si

$$\lambda_{n+1}=\pm\alpha\pm\beta i \qquad (\alpha=1,2) \quad (\beta=1,2),$$

on trouve que λ_{n+2} ne peut pas être égal à

$$\pm 1\mp i.$$

En résumé, si

$$\lambda_{n+1}=\pm 1\pm i, \qquad \lambda_{n+2}=\mp A\pm Bi \qquad \begin{cases} A>0, \\ B>0; \end{cases}$$

si

$$\lambda_{n+1} = \pm 2, \qquad \lambda_{n+2} = \mp A + Bi, \qquad A > 0;$$

si

$$\lambda_{n+1} = \pm 2i, \qquad \lambda_{n+2} = \quad A \pm Bi, \qquad B > 0.$$

Enfin, si

$$\lambda_{n+1} = \pm \alpha \pm \beta i \qquad (\alpha = 1, 2) \quad (\beta = 1, 2),$$

λ_{n+2} ne peut être égal à $\pm 1 \mp i$.

Ainsi que nous l'avons dit, ces propriétés se vérifient facilement; elles permettent de reconnaître *a priori* si un développement donné peut être le développement effectif d'un nombre complexe, ou n'en est qu'une représentation formelle.

28. Tout ce que nous avons dit dans les n^os^ **2** à **12** inclus de la première Partie s'applique, intégralement et sans aucun changement, au cas des fractions continues complexes.

La formule du n° **13**,

$$\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} = a_0 \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_0 a_1} \right),$$

subsiste également; mais, dans le cas actuel, le rapport $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$ a un module minimum, non plus égal à 5, mais seulement à 3, ainsi que nous allons l'établir.

Posons

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \overline{OM}, \qquad \lambda_k = \overline{O\lambda},$$

on a

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \lambda_k - \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

d'où

$$\overline{OM} = \overline{O\lambda} - \overline{M\lambda},$$

et, par suite,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \overline{M\lambda}$$

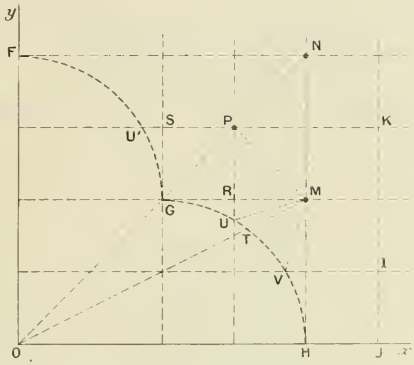
et

$$\left| \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} \right| = \frac{OM}{M\lambda}.$$

Soit d'abord

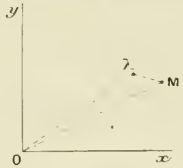
$$\lambda_k = \mathrm{OG} = 1 + i.$$

Fig. 3.



M sera un point situé à l'intérieur du polygone curviligne GURPSU'

Fig. 4.



et nous avons, en considérant les sommets de ce polygone,

$$\frac{\mathrm{UO}}{\mathrm{UG}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{6+3\sqrt{3}} = 3,346\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PG}} = 3,$$

$$\frac{\mathrm{U'O}}{\mathrm{U'G}} = 3,346.$$

Le minimum du rapport $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$ est 3.

Si $\lambda_k = \mathrm{OH} = 2$, le point M est situé dans le quadrilatère HVIJ ou son symétrique par rapport à Ox; le minimum de $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$ a lieu lorsque le point est en V et l'on a

$$\frac{\mathrm{VO}}{\mathrm{VH}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3} = 3,732\ldots.$$

Lorsque $\lambda_k = \mathrm{OM} = 2 + i$, le point se trouve à l'intérieur du polygone UVJKP.

Nous trouvons

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PM}} = 3,$$

$$\frac{\mathrm{UO}}{\mathrm{UM}} = 3,346,$$

$$\frac{\mathrm{TO}}{\mathrm{TM}} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{4}\sqrt{5}} = 4,$$

$$\frac{\mathrm{VO}}{\mathrm{VM}} = 3,732.$$

Inutile d'envisager les sommets I et K ; d'où

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| > 3.$$

Enfin, si $\lambda_k = \mathrm{ON} = 2 + 2i$, le minimum de ce rapport est évidemment

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PN}} = 3.$$

Nous avons donc établi que, dans tous les cas,

$$(36) \qquad \left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| > 3.$$

29. En tenant compte de la formule qui précède, nous trouvons que l'expression

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_0 a_1}$$

a un module inférieur à

$$\frac{3}{2}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|;$$

par suite, on en déduit

$$(37)\qquad \frac{1}{2}|a_0| < |a_n Q_0^{n+1}| < \frac{3}{2}|a_0|,$$

$$(38)\qquad |a_{n+2} Q_0^{n+1}| < \frac{1}{2}|a_0|,$$

et comme

$$|a_{n+1}| < \frac{\sqrt{2}}{2}|a_n|,$$

on tire de (37)

$$(39)\qquad |a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{3\sqrt{2}}{4}|a_0|.$$

Si l'on avait

$$|a_{n+1}| < \frac{1}{\sqrt{3}}|a_n|,$$

on en tirerait

$$(40)\qquad |a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0|,$$

et, de même que dans le cas réel, on démontrerait que si

$$|a_{n+1} Q_0^{n+1}| > \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0|,$$

on aura nécessairement

$$|a_n Q_0^n| < \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0| \qquad \text{et} \qquad |a_{n+2} Q_0^{n+2}| < \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0|.$$

Enfin, des relations ci-dessus

$$|a_n Q_0^{n+1}| > \frac{1}{2}|a_0|, \qquad |a_n Q_0^n| < \frac{3\sqrt{2}}{4}|a_0|, \qquad a_n Q_0^{n-1}| < \frac{1}{2}|a_0|,$$

on tire

$$(41)\qquad \frac{|Q_0^{n+1}|}{Q_0^n} > \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad |Q_0^{n+1}| > |Q_0^{n-1}|.$$

On aura de même

$$(42)\qquad \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right| = |\Delta_n| = \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| < \frac{2\sqrt{2}}{3}\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^2.$$

Donc $|\Delta_n|$ décroît au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et, par suite, $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}$ a pour limite $\frac{a_0}{a_1}$, lorsque n augmente indéfiniment.

Nous trouvons enfin aisément

$$(43)\qquad \left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| > 1,$$

ce qui montre que l'approximation des réduites successives va constamment en augmentant.

Le théorème fondamental des réduites n'a plus lieu dans le cas des nombres complexes; on démontre cependant que si $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}$ est une réduite de $\frac{a_0}{a_1}$, il n'existe pas de fraction irréductible $\frac{A}{B}$, $|B| < |Q_1^n|$, à l'intérieur du cercle décrit sur le segment $\frac{Q_0^n}{Q_1^n} \cdots \frac{a_0}{a_1}$, comme diamètre; c'est en somme une généralisation de la notion de distance entre deux points non situés sur l'axe réel.

30. Le théorème de Lagrange se démontre de la même manière que pour les nombres réels; en tenant compte des relations (37), (38) et (39), on trouve aisément que L et N ont un module inférieur à

$$(44)\qquad \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{\Delta}$$

et que l'un au moins de ces deux coefficients a un module inférieur à

$$(44')\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2},$$

on a également

$$0 < |M| < 2\sqrt{\Delta}.$$

Il en résulte qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on retombe sur une équation déjà envisagée; le nombre des formes réduites et des nombres réduits est donc limité et il sera facile de les déterminer.

Étant données deux irrationnelles quelconques, on saura donc, par la comparaison de leurs développements en fraction continue, si elles sont ou non équivalentes, et dans le premier cas on saura trouver la substitution modulaire générale qui permet de passer de l'une à l'autre.

De même que pour les nombres réels, si un nombre réduit

$$\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

on aura

$$\frac{1}{\omega'} = \left(\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\omega'}\right);$$

mais ce développement, quoique exact, pourra différer du développement réel de $\frac{1}{\omega'}$ si la suite des λ, lue dans les deux sens, ne remplit pas les conditions du n° **27**.

Pour que ω soit équivalent à $-\omega'$, il faut, comme pour les nombres réels, soit que

$$\omega_i + \omega'_i = \lambda, \quad \text{nombre entier};$$

soit que

$$\omega_i \omega'_i = 1.$$

Pour que ω soit équivalent à $+\omega'$, il faut que

$$\omega_i \omega'_i = -1.$$

Pour que ω soit équivalent à $-\omega$, il faut que l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = -4$$

soit résoluble.

De même, pour que ω soit équivalent à $\pm i\omega'$, il faut que l'on ait

$$\omega_i \omega'_i = \pm i.$$

Enfin, pour que ω soit équivalent à $\pm \omega i$, il faut que l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = \pm 4i$$

soit résoluble.

Ces théorèmes se démontrent comme dans le Chapitre II, sans aucune difficulté ; il suffit de remarquer que, si

$$\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \ldots),$$

on aura évidemment

$$\pm \omega i = (\pm \lambda_1 i, \mp \lambda_2 i, \pm \lambda_3 i, \mp \lambda_4 i, \pm \lambda_5 i, \ldots).$$

31. Considérons le discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

On a évidemment

$$B \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm i \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \pm i \pmod 2.$$

Par suite,

$$B^2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 2i \pmod 4.$$

Il en est de même, dès lors, de Δ :

$$\Delta \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 2i \pmod 4.$$

Les cas de $\Delta = 0$, $\Delta = \pm 1$, $\Delta = \pm 2i$ ne doivent pas être retenus, car, le discriminant étant alors un carré parfait, on n'obtient pas une véritable irrationnelle.

Le discriminant de plus petit module est $\Delta = 3$. On trouve facilement comme nombre réduit

$$\frac{2 + \sqrt{3} + i}{2} = (2 + i, 1 - 2i)$$

et comme forme correspondante

$$x^2 - (2 + i)x + i = 0.$$

Pour $\Delta = -3$, il suffit de multiplier le nombre réduit ci-dessus par i,

$$\frac{(2 + \sqrt{3})i - 1}{2} = (2i - 1, i + 2).$$

et comme forme

$$x^2 + (1 - 2i).x - i = 0.$$

On sait que tout nombre complexe peut être décomposé en ses facteurs premiers, qui sont :

(*a*) ou réels de la forme

$$4k -$$

(*b*) ou imaginaires de la forme

$$2m + 1 + 2ni,$$

avec la condition

$$(2m + 1)^2 + 4n^2 = p,$$

nombre premier réel.

Il en résulte que Δ peut être égal soit à un nombre réel quelconque, soit à un nombre complexe quelconque, multiplié par une puissance de $2i$,

$$\Delta = N_{\text{réel}},$$

$$\Delta = (2i)^{\mu} N_{\text{compl.}} \qquad (\mu \geqq 1).$$

Telle est la forme générale des discriminants, laquelle diffère complètement de celle qui est donnée dans les Traités classiques : cela tient à ce que nous avons élargi la notion d'équivalence en l'appliquant aux nombres complexes.

Nous croyons inutile de donner des applications numériques, car elles ne présentent aucune difficulté.

Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor;

PAR M. L. DESAINT.

Ce Mémoire est une contribution à l'un des problèmes essentiels que l'on peut se poser sur les fonctions données par une série de Taylor, et qui s'énonce ainsi :

Étant données p fonctions, développables en séries de Taylor au voisinage de l'origine

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Sigma a_1(n) z^n, \\ F_2(z) &= \Sigma a_2(n) z^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(z) &= \Sigma a_p(n) z^n, \end{aligned}$$

reconnaître les points singuliers d'une fonction

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n,$$

le coefficient $A(n)$ *résultant d'une opération* f *connue exécutée sur* $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)$, *de telle sorte que l'on ait*

$$A(n) = f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)].$$

Le problème, ainsi posé, a reçu sa solution dans le cas où

$$p = 2,$$
$$A(n) = a_1(n) \times a_2(n),$$

solution qui donna lieu à l'étude fondamentale de M. Hadamard sur ce sujet (*Acta mathematica*, t. XXII). Cette étude fut suivie des travaux de MM. Borel et Leau (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVI); M. Borel précisait la nature des singularités, en étendant la proposition de M. Hadamard au cas d'un polynome f à p variables. M. Leau s'occupa de plus du cas où $f = f[a_1(n)]$ avec $a_1(n) = \frac{1}{n}$ dans le *Journal de Mathématiques pures*, 1899. Les nombreux résultats obtenus par M. Le Roy, dans une voie différente, se rattachent, au fond, au problème considéré (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901).

Enfin, en élargissant encore l'énoncé et en faisant entrer dans f à la fois les divers coefficients des séries de Taylor

$$F_1 = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2 = \Sigma a_2(n) z^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_p = \Sigma a_p(n) z^n,$$

on arrive aux résultats particuliers obtenus, dans ce cas, par MM. Hurwitz, dell' Agnola et Pincherle (*Acta mathematica*, t. VII; *Math. Annalen*, t. LXIX, *Annali di Matematica*, t. IV).

Je m'en tiendrai, dans cette étude, à l'énoncé général posé au début, et je me propose ici de traiter, dans toute sa généralité, ce problème, en opérant sur p fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$, la fonction des coefficients

$$f(x, y, \dots, u),$$

à p variables, étant peu conditionnée, c'est-à-dire soumise uniquement à une condition d'holomorphisme au voisinage du point $(x = 0, y = 0, \dots, u = 0)$.

J'espère revenir bientôt sur les applications des propositions de ce Mémoire aux équations différentielles.

Le premier des théorèmes auxquels je suis arrivé peut s'énoncer ainsi :

Soit $F(z)$ *une fonction donnée par une série de Taylor*

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n$$

valable à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un et soit

$$\Phi(z) = \Sigma f[a(n)] . z^n$$

une fonction donnée de même par une série de Taylor, la fonction

$$f(x)$$

étant développable en série de Taylor à l'intérieur d'un cercle de rayon non nul et de centre $x = 0$.

Dans ces conditions, la fonction

$$\Phi(z)$$

n'a d'autres points singuliers (sauf $x = 1$ *et* $x = \infty$*) que les points obtenus en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points singuliers de la fonction*

$$F(z),$$

chacun d'eux y figurant un nombre quelconque de fois.

Remarquons, à cet effet, le développement

$$f(x) = \Sigma \alpha(k) . n^k, \qquad |x| < \rho.$$

Les coefficients $a(n)$ tendant vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment, à partir de $n = N$, nous aurons les inégalités

$$|a(n)| < \rho, \qquad n = N, \qquad N + 1, \qquad \ldots, \qquad \infty$$

et nous pourrons écrire

$$f[a(n)] = \Sigma \alpha(k) a_n^k.$$

Or

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t)}{t} t^{-n} dt.$$

Le contour C′ est ainsi choisi : il entourera les diverses singularités de $F(z)$ et pourra s'en approcher, d'ailleurs, autant que l'on voudra sans être infiniment près d'elles; tout ensemble de singularités de $F(z)$ sera traité de la manière suivante : ses éléments voisins des éléments limites, ainsi que les éléments limites eux-mêmes et les éléments formant continuum aréolaire, seront entourés de lignes qui, avec les lignes analogues en nombre fini, définiront une aire multiplement connexe, limitée par un contour non continu c'.

A cause des expressions

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{F(t)}{t} t^{-n}\, dt,$$

on déduit

$$f[a(n)] = \Sigma\, \alpha(k) \times \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{F(t)}{t} t^{-n}\, dt\right)^k.$$

Ce développement est valable à partir de n suffisamment grand, par exemple à partir de $n = N$, puisque. $a(n)$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, $|a(n)|$ devient plus petit que le rayon de convergence ρ de la série de Taylor définissant $f(x)$ au voisinage de l'origine.

Écrivons

$$f[a(n)] = \Sigma\, \alpha(k) \times \int_{c'} \cdots \int_{c'} \frac{F(t_1)}{2\pi i t_1} \frac{F(t_2)}{2\pi i t_2} \cdots$$
$$\times \frac{F(t_k)}{2\pi i t_k} (t_1 t_2 \ldots t_k)^{-N} (t_1 t_2 \ldots t_k)^{n-N} dt_1 \ldots dt_k.$$

La fonction $\Phi(z)$ donnée par le développement taylorien

$$\Phi(z) = \Sigma f[a(n)] z^n$$

se met sous la forme

$$\Phi(z) = \sum_0^{N-1} f[a(n)] z^n$$
$$+ z^N . \sum \alpha(k) . \int_{c'} \cdots \int_{c'} \frac{\dfrac{F(t_1).F(t_2)\ldots F(t_k)}{(2\pi i)^k (t_1 t_2 \ldots t_k)^{N+1}}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_k}{1 - \dfrac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}}.$$

Pour justifier l'introduction de cette dernière somme, il suffit de montrer que l'intégrale figurant comme coefficient de $\alpha(k)$ est une fonction holomorphe de z en dehors des points définis par

$$1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k} = 0,$$

la valeur de cette intégrale ayant un module inférieur à

$$\frac{1}{\theta}\rho^k,$$

où θ est une quantité finie non nulle.

A cet effet, considérons l'intégrale

$$\int_{c'}\cdots\int_{c'}\left|\frac{F(t_1)}{2\pi i t_1}\right|\cdots\left|\frac{F(t_k)}{2\pi i t_k}\right||t_1 t_2 \ldots t_k|^{-N}|dt_1|\ldots|dt_k|$$

formée avec les modules des éléments figurant en numérateur.

Cette intégrale s'écrit encore

$$\left(\int_{c'}\left|\frac{F(t)}{2\pi i t}\right||t|^{-N}|dt|\right)^k.$$

Puisque N peut être pris aussi grand que l'on veut, comme t possède sur c' un module supérieur à *un*, on peut poser

$$\int_{c'}\left|\frac{F(t)}{2\pi i t}\right||t|^{-N}|dt| < \rho.$$

En désignant par $\theta \gtrless 0$ la plus petite des valeurs de

$$1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k},$$

en dehors de l'ensemble

$$t_1 t_2 \ldots t_k,$$

le module de l'intégrale, apparaissant comme coefficient de $\alpha(k)$, est inférieur à

$$\frac{1}{\theta}\rho^k.$$

Considérons alors l'aire A′ limitée par c' et formons une aire A obtenue en multipliant les points de A′ entre eux. Désignons par c le contour limitant A. Ce contour c divise le plan de la variable en deux régions; nous désignerons par R celle des deux régions qui contient le cercle de rayon un ayant l'origine pour centre. Pour démontrer l'holomorphisme, dans R, de l'intégrale

$$\int_{c'} \cdots \int_{c'} \frac{\dfrac{F(t_1).F(t_2)\ldots F(t_k)}{(2\pi i)^k t_1 t_2 \ldots t_k}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_k}{1 - \dfrac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}},$$

il suffit de se reporter au théorème sur les fonctions d'une variable définies par des séries absolument convergentes d'ordre de multiplicité fini et infini.

Remarque. — Les points $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ont été pris aussi voisins que possible des points singuliers de $F(z)$, mais non pas infiniment près de ceux-ci: aussi, lorsque k augmente indéfiniment, on ne peut dire que

$$t_1 t_2 \ldots t_k$$

représente le produit de k points singuliers de $F(z)$; mais k augmentant indéfiniment, ce produit devient infini. Dans l'énoncé, on réservera donc les points à l'infini.

La méthode que nous venons d'employer conduit à ce deuxième théorème :

Soit $F(z)$ *une fonction donnée par une série de Taylor*

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n,$$

valable au voisinage de l'origine, et soit

$$\Phi(z) = \Sigma f(a_n) z^n$$

une fonction donnée de même par une série de Taylor, la fonction

$$f(x)$$

étant entière.

Dans ces conditions, la fonction

$$\Phi(z)$$

n'a d'autres points singuliers que ceux qu'on obtient en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points singuliers de la fonction

$$F(z),$$

chacun d'eux y figurant un nombre quelconque de fois.

Il convient de faire la même réserve que tout à l'heure au sujet des singularités $x = 1, x = \infty$. Voici, cette restriction faite, la démonstration de ce deuxième théorème. Il suffira de faire $N = 0$ dans la formule précédente et de remarquer que, en dehors des points définis par

$$z = t_1 t_2 \ldots t_k,$$

la série

$$(1) \qquad \Sigma \alpha(k) \int_{c'} \ldots \int_{c'} \frac{\frac{F(t_1)}{2\pi i . t_1} \ldots \frac{(F t_k)}{2\pi i . t_k} dt_1 \ldots dt_k}{1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}}$$

est convergente.

En effet, dans une région ne contenant pas les points

$$z = t_1 t_2 \ldots t_k,$$

la quantité

$$1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}$$

prend un module minimum

$$r_k,$$

et, par suite, le module de l'intégrale multiple

$$\int_{c'} \ldots \int_{c'} \frac{\frac{F(t_1)}{2\pi i . t_1} \frac{F(t_2)}{2\pi i . t_2} \ldots \frac{F(t_k)}{2\pi i . t_k} d_1 dt_2 \ldots dt_k}{1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}}$$

est inférieur

$$\frac{1}{r_k} \times \left(\int_{c'} \left| \frac{F(t)}{2\pi i t} \right| |dt| \right)^k.$$

Or désignons par ρ le module *fini* de l'intégrale

$$\int \left| \frac{F(t)}{2\pi i t} \right| |dt|.$$

La série (1) a ses termes de module respectivement inférieur à

$$\frac{\alpha(k).\rho^k}{r_k}$$

ou bien encore à

$$\frac{1}{r} \alpha(k) \rho^k,$$

en désignant par r la plus petite des quantités r_k, r étant d'ailleurs différent de zéro.

Comme la série

$$f(x) = \Sigma \alpha(k) x^k$$

est entière, la série

$$\frac{1}{r} \Sigma \alpha(k) \rho^k$$

est absolument convergente et, par suite, la série (1) l'est aussi. Les points singuliers de $\Phi(z)$ se trouvent parmi les points représentés par les produits

$$t_1 t_2 \ldots t_k.$$

Remarque. — Les deux théorèmes dont nous venons de donner la démonstration peuvent s'exposer rigoureusement ainsi sans restriction. Soit A' l'aire limitée par un contour tel que c'. Les points singuliers de $\Phi(z)$ sont à l'intérieur de l'aire A'' obtenue en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points de A'.

Par une extension facile de la méthode que nous venons d'employer, nous sommes conduits à ce second théorème, qui synthétise tous les résultats exposés dans ce Mémoire et la plupart des propositions générales connues jusqu'à ce jour dans l'ordre des recherches qui nous occupent :

Étant donné un nombre quelconque de fonctions

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= \Sigma a_1(n) z^n,\\
F_2(z) &= \Sigma a_2(n) z^n,\\
F_3(z) &= \Sigma a_3(n) z^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F_p(z) &= \Sigma a_p(n) z^n
\end{aligned}$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un, soit $\Phi(z)$ *une fonction donnée aussi par une série de Taylor*

$$\Phi(z) = \Sigma f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)] z^n.$$

Si la fonction de p variables

$$f(x, y, u, \ldots, w)$$

est holomorphe au voisinage de l'origine

$$(x = 0, y = 0, u = 0, \ldots, w = 0),$$

la fonction $\Phi(z)$ *n'a pas d'autres points singuliers (sauf* $x = 1$ *et* $x = \infty$*) que les points obtenus en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les singularités des p fonctions*

$$F_1(x), \quad \ldots, \quad F_p(z),$$

chacune de ces singularités figurant un nombre quelconque de fois dans les produits ainsi formés.

La démonstration de ce théorème est aisée. Il suffit de remarquer le développement

$$f(x, y, \ldots, w) = \Sigma \alpha(m, q, \ldots, r) x^m y^q \ldots w^r \qquad \left\{ \begin{array}{l} |x| \leqq R_1 \geqq 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ |w| \leqq R_p \geqq 0, \end{array} \right.$$

et d'y faire successivement

$$x = a_1(n),$$
$$y = a_2(n),$$
$$\dots\dots\dots,$$
$$w = a_p(n),$$

de telle sorte que l'on ait

$$f[a_1(n), \dots, a_p(n)] = \Sigma a(m, q, \dots, r) a_1^m(n) \dots a_p^r(n),$$

où

$$\Sigma \alpha(m, q, \dots, r)$$

est absolument convergente.

De plus,

$$a_1(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'_1} \frac{F_1(t)}{t} t^{-n} dt,$$
$$a_2(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'_2} \frac{F_2(t)}{t} t^{-n} dt,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_p(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'_p} \frac{F_p(t)}{t} t^{-n} dt.$$

Les contours $c'_1, c'_2, \dots, c'_p$ sont choisis comme il a été dit à propos de c'. Le développement de

$$f[a_1(n), \dots, a_p(n)]$$

devient

$$f[a_1(n), \dots, a_p(n)]$$
$$= \sum \alpha(m, q, \dots, r) \times \left[\int_{c'_1} \frac{F_1(t)}{2\pi i t} t^{-n} dt\right]^m \times \dots \times \left[\int_{c'_p} \frac{F_p(t)}{2\pi i t} t^{-n} dt\right]^r.$$

Ce développement est valable pour les valeurs de n suffisamment grandes, par exemple à partir de $n = N$, les quantités $a_1(n), \dots, a_p(n)$ tendant vers o lorsque n augmente indéfiniment, par le fait que le module de t sur $c'_1, c'_2, \dots, c'_p$ est supérieur à un, ou plus simplement encore à cause de la convergence des séries de Taylor $F_1(z), \dots, F_p(z)$.

Écrivons

$$
\begin{aligned}
f = \sum \alpha(m, q, \ldots, r) & \\
& \times \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_1} \frac{F_1(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1} \cdots \frac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{(m)}} \cdots \\
& \times \int_{c'_p} \cdots \int_{c'_p} \frac{F_p(t_p^{1})}{2\pi i t_p^{(1)}} \cdots \frac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}} (t_1^{1} \ldots t_1^{(m)} \ldots t_p^{(r)})^{-n} dt_1^{(1)} \ldots dt_p^{(r)} \\
= \sum \alpha(m, q, \ldots, r) & \\
& \times \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_1} \frac{F_1(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1} \cdots \frac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}} \cdots \\
& \times \int_{c'_p} \cdots \int_{c'_p} \frac{F_p(t_p^{(1)})}{2\pi i t_p^{(1)}} \cdots \frac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}} (t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)})^{-N} (t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)})^{-(n-N)} dt_1^{1} \ldots dt_p^{(r)}.
\end{aligned}
$$

La fonction $\Phi(z)$ s'écrit donc

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) = \sum_0^{N-1} f[a_1(n), \ldots, a_p(n)] z^n + z^N \sum \alpha(m, q, \ldots, r) & \\
\times \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_p} \cdots \int_{c'_p} & \frac{\dfrac{F_1(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1} \cdots \dfrac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}} \cdots \dfrac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{r}} (t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)})^{-N} dt_1^{(1)} \ldots dt_p^{(r)}}{1 - \dfrac{z}{t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)}}}.
\end{aligned}
$$

On justifierait l'introduction de cette dernière somme en faisant voir qu'on peut toujours prendre N suffisamment grand pour que la série du second membre soit convergente, lorsque z est en dehors des points définis par

$$z = t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)}.$$

En effet, dans une région ne contenant pas ces points, la quantité

$$1 - \frac{z}{t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)}}$$

prend un module minimum

$$\theta_{m, \ldots, r}$$

différent de zéro. Par suite, le module de l'intégrale

$$I_{m,q,\ldots,r} = \int_{c'_1}\cdots\int_{c'_1}\cdots\int_{c'_p}\cdots\int_{c'_p} \frac{\frac{F(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1}\cdots\frac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}}\cdots\frac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}}(t_1^{(1)}\ldots t_p^{(r)})^{-N}dt_1^{(1)}\ldots dt_p^{(r)}}{1-\frac{z}{t_1^{(1)}\ldots t_p^{(r)}}}$$

est inférieur à

$$\frac{1}{\theta_{m,\ldots,r}}\int_{c'_1}\cdots\int_{c'_1}\cdots\int_{c'_p}\cdots\int_{c'_p}\left|\frac{F(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1}\right|\cdots\left|\frac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}}\right|\cdots\left|\frac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}}\right||t_1^{1}\ldots t_p^{r}|^{-N}|dt_1^{1}|\ldots|dt_p^{r}|.$$

Déterminons N de telle façon que

$$\left[\int_{c'_1}\left|\frac{F(t_1^{1})}{2\pi i t_1}\right||t_1^{1}|^{-N}|dt_1^{1}|\right] = \rho_1 < R_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{c'_p}\left|\frac{F(t_p)}{2\pi i t_p}\right||t_p|^{-N}|dt_p| = \rho_p < R_p.$$

Il est possible de prendre N suffisamment grand, de telle sorte que sous la condition

$$N > N_0$$

les inégalités précédentes soient vérifiées, à cause des modules de t_1 sur c'_1, de t_2 sur c'_2, ..., de t_p sur c'_p, modules qui restent supérieurs à un sur chacun de ces contours c'. Ainsi le module de $I_{m,q,\ldots,r}$ reste inférieur à

$$\frac{1}{\theta_{m,\ldots,r}}\rho_1^{m}\rho_2^{q}\cdots\rho_p^{r}.$$

La série qui figure dans le second membre de l'identité définissant $\Phi(z)$ a ses termes respectivement inférieurs à

$$\frac{1}{\theta}\alpha(m, q, \ldots, r)\rho_1^{m}\rho_2^{q}\cdots\rho_p^{r},$$

où θ désigne la plus petite des quantités $\theta_{m,q,\ldots,r}$, θ étant d'ailleurs différent de zéro. Or, d'après les conditions qui déterminent

$$f(x, y, \ldots, w),$$

la série, dont le terme général est

$$\alpha(m, q, \ldots, r) R_1^m R_2^q \ldots R_p^r,$$

est absolument convergente. *A fortiori*, à cause des inégalités

$$\begin{aligned} \rho_1 &< R_1, \\ \rho_2 &< R_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \rho_p &< R_p, \end{aligned}$$

la série de terme général

$$\alpha(m, q, \ldots, r) \rho_1^m \rho_2^q \ldots \rho_p^r$$

est absolument convergente.

Ainsi la série qui intervient dans l'expression de $\Phi(z)$ est convergente et, par suite, la fonction $\Phi(z)$ n'a en toute rigueur aucun point singulier en dehors de l'aire obtenue, en multipliant de toutes les manières possibles les points des aires $A_1, A_2, \ldots, A_p$ limitées par $c_1, c_2, \ldots, c_p$. En réservant le point à l'infini, la fonction $\Phi(z)$ n'a donc pas d'autres points singuliers que les points obtenus en multipliant de toutes les manières possibles les singularités de $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_p(z)$.

Ce théorème se complétera d'ailleurs aisément par le suivant :

Soient $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ *des fonctions données par une série de Taylor*

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Sigma a_1(n) z^n, \\ F_2(z) &= \Sigma a_2(n) z^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(z) &= \Sigma a_p(n) z^n, \end{aligned}$$

et soit $\Phi(z)$ *une fonction donnée de même par une série de Taylor*

$$\Phi(z) = \Sigma f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)] z^n.$$

Si la fonction

$$f(x, y, \ldots, w)$$

est-entière, la fonction

$$\Phi(z)$$

n'a pas d'autres points singuliers (sauf $x = 1$ *et* $x = \infty$*) en dehors des points obtenus en multipliant entre eux de toutes les manières possibles les points singuliers des fonctions* $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., $F_p(z)$ *chacun d'eux y figurant un nombre quelconque de fois.*

Il suffit, pour établir cette proposition, de répéter ce que nous avons dit dans les deux propositions qui la précèdent. En d'autres termes, on remarque que le développement de

$$f(x, y, \ldots, w),$$

suivant les puissances de $x, y, \ldots, w$, est ici valable pour toutes valeurs des variables $x, y, \ldots, w$; le raisonnement s'achève facilement.

Le second théorème général, dont nous avons donné l'énoncé, admet un corollaire bien simple et qui explique aisément le fait suivant. Lorsqu'on cherche les points singuliers d'une fonction donnée par une série de Taylor (à rayon de convergence au moins égal à un),

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n,$$

en tirant la connaissance des points singuliers de la forme analytique,

$$A(x),$$

on trouve que, pour des circonstances analytiques extrêmement nombreuses et importantes de cette forme, la fonction

$$F(z)$$

a tous ses points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles, en dehors du cercle de rayon un. La proposition qui suit en donne l'explication par son énoncé même :

Étant données plusieurs fonctions

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Sigma a_1(n) z^n, \\ F_2(z) &= \Sigma a_2(n) z^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(z) &= \Sigma a_p(n) z^n, \end{aligned}$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un, sous la condition que

$$f(x, y, \ldots, w)$$

soit holomorphe au voisinage de l'origine $(x = 0, y = 0, \ldots, w = 0)$, *si les p fonctions* $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ *ont leurs points singuliers (à distance finie) sur l'axe des quantités réelles, la fonction* $\Phi(z)$ *donnée par la série de Taylor*

$$\Phi(z) = \Sigma f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)] z^n$$

a ses points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles.

La généralité même de la définition de

$$f(x, y, \ldots, w)$$

montre la latitude que l'on a pour trouver des fonctions ayant leurs points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles, en partant de noyaux tayloriens dépendant de formes analytiques

$$A(x).$$

Remarque. — Ce corollaire est susceptible de plus de précision, quand les points singuliers de $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ sont sur l'axe des quantités réelles positives; dans ce cas, la fonction $\Phi(z)$ a ses points singuliers répartis sur ce même axe.

Il est facile de tirer encore du théorème général qui précède d'autres corollaires. Voici tout d'abord une première proposition :

Etant données plusieurs fonctions

$$F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_p(z) = \Sigma a_p(n) z^n,$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un, sous la condition que la fonction

$$f(x, y, \dots, w)$$

soit holomorphe au voisinage de l'origine $(x = 0, y = 0, \dots, w = 0)$, *si les p fonctions* $F_1(z) \dots F_p(z)$ *ont leurs points singuliers situés sur un nombre limité de droites passant par l'origine faisant avec l'axe des quantités réelles des angles commensurables avec l'angle droit, les points singuliers de* $\Phi(z)$ *sont situés sur un nombre limité de droites.*

En effet, les points singuliers de $\Phi(z)$ s'obtiennent en multipliant entre eux les points singuliers de $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., $F_p(z)$; par suite l'argument de chacun d'eux est compris dans la formule

$$\theta = \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \dots + \alpha_k \theta_k,$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ désignent les arguments des droites en nombre limité sur lesquelles se trouvent les points singuliers de $F_1(z) \dots F_p(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ étant des nombres entiers : les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_k$ étant commensurables avec 360°, égaux par exemple à

$$\frac{p_1}{q_1} 360,$$
$$\frac{p_2}{q_2} 360,$$
$$\dots\dots,$$
$$\frac{p_k}{q_k} 360;$$

il suffira, pour avoir toutes les valeurs de θ entre 0 et 360°, de donner

au plus à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ toutes les valeurs entières de o à m, où m est le plus petit commun multiple à $q_1, q_2, \ldots, q_k$; à ces valeurs en nombre fini correspondent un nombre fini de valeurs de θ.

Voici une dernière remarque sur les points singuliers de $\Phi(z)$.

Désignons par R_1 le rayon du cercle de convergence de $\Phi(z)$ et soit E l'ensemble total des points singuliers de $F_1, F_2, \ldots, F_p$; en supposant que les points de E puissent se répartir successivement sur les cercles de rayons $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$, les points singuliers de $\Phi(z)$, *de module au plus égal à* R_1^ρ, sont situés sur des cercles dont les rayons se trouvent parmi les quantités

$$R_1^\alpha \times R_2^\beta \times \ldots \times R_\mu^\lambda$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda \leqq \rho - 1.$$

Cette remarque résulte de la proposition générale sur les points singuliers de $\Phi(z)$, qui se trouvent parmi les produits des divers points de l'ensemble E.

Nous pouvons résumer tout ce qui vient d'être dit sur les fonctions d'une variable considérées dans leur développement de Taylor par cette considération synthétique.

Soient deux fonctions quelconques,

$$F_1(z),$$
$$F_2(z),$$

développables au voisinage de l'origine en séries de Taylor

$$F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n,$$

de rayon de convergence supérieur à un.

Nous savons que dans tous les cas (Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*) nous pouvons considérer $a(X)$ et $b(X)$ comme des fonctions entières en X, dont les valeurs pour les nombres entiers positifs sont

$$a(n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$b(n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Écrivons

$$b(x) = f[a(x)],$$

où f est une fonction analytique en général non uniforme. Sauf dans le cas où l'origine est un point singulier, on passe des singularités de $F_1(z)$ aux singularités de $F(z)$ par la multiplication des singularités de la première fonction. La *différence profonde* des ensembles de points singuliers de deux fonctions quelconques

$$F_1(z)$$

et

$$F_2(z)$$

est donc *condensée* dans le point singulier à l'origine de

$$f(x).$$

La méthode dont nous nous sommes servis s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

Soient

$$\begin{aligned}
F_1(z, z', z'') &= \Sigma a_1(n, n', n'')\, z^n z'^{n'} z''^{n''},\\
F_2(z, z', z'') &= \Sigma a_2(n, n', n'')\, z^n z'^{n'} z''^{n''},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F_p(z, z', z'') &= \Sigma a_p(n, n', n'')\, z^n z'^{n'} z''^{n''}
\end{aligned}$$

des fonctions des variables z, z', z'' holomorphes lorsque (z, z', z'') sont respectivement à l'intérieur de c, c', c'', ces contours renfermant le cercle de rayon *un* de leur plan, dont le centre est l'origine.

Si

$$f(x, y, \ldots, w)$$

est une fonction de p variables, holomorphe au voisinage de l'origine $(x = 0, y = 0, w = 0)$, la fonction

$$\begin{aligned}
&\Phi(z, z', z'')\\
&\quad = \Sigma f[a_1(n, n', n''), a_2(n, n', n''), \ldots, a_p(n, n', n'')]\, z^n z'^{n'} z''^{n''}
\end{aligned}$$

est holomorphe à l'intérieur de la surface limitée par (c, c', c'') (sauf aux points $z = 1$, $z' = 1$, $z'' = 1$ de cette surface).

Il suffit de remplacer l'expression de

$$a_p(n, n', n'')$$

suivant une intégrale triple

$$a_p(n, n', n'') = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_c \int_{c'} \int_{c''} \frac{F(t_p, t'_p, t''_p)}{t_p, t'_p, t''_p} \times t_p^{-n} t_p'^{-n'} t_p''^{-n''} \, dt_p \, dt'_p \, dt''_p \qquad \left\{ \begin{array}{l} |t_p| > 1 \\ |t'_p| > 1 \\ |t''_p| > 1 \end{array} \right.$$

et les expressions analogues de $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ par des intégrales triples; en développant $f(x, y, \ldots, w)$ suivant les puissances des variables $x, y, \ldots, w$

$$f(x, y, \ldots, w) = \Sigma \alpha(m, q, \ldots, z) x^m y^q \ldots w^r$$

si l'on remplace dans ce développement $x, y, \ldots, w$ par $a_1(n, n', n'')$, $a_p(n, n', n'')$, ces coefficients étant mis sous forme d'intégrales triples comme il vient d'être dit, on obtient par série la représentation de

$$\Phi(z, z', z'').$$

Cette représentation est valable à l'intérieur de la surface limitée par les contours c, c', c''; il en sera de même pour tous les contours associés c, c', c'' analogues aux cercles à rayons associés.

La méthode que nous avons employée s'étend des fonctions d'une variable aux fonctions de plusieurs variables. La généralité des propositions auxquelles elle donne lieu permet de se figurer la multiplicité de leurs applications possibles. Je développerai, prochainement, l'usage qu'on peut en faire pour l'étude des singularités de l'intégrale d'une équation différentielle générale.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME VIII.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

Pages

[S] Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme; par M. *P. Duhem*..... 5

[H1] Sur une catégorie de fonctions transcendantes et les équations différentielles rationnelles; par M. *Edmond Maillet*..... 19

[H10d] Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$; par M. *S. Zaremba*. 59

[H5] Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriqnes; par M. *Paul-J. Suchar*..... 119

[L1S] Sur l'hexacoryphe complet; par M. *Aristide Zoukis*..... 135

[D5] Sur les cycles des surfaces algébriques; par M. *H. Poincaré*... 169

[S] Sur la stabilité de l'équilibre relatif; par M. *P. Duhem*..... 215

[P6] Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution; par M. *Geminiano Pirondini*..... 229

[A4] Sur les équations de certains groupes; par M. *de Séguier*..... 253

[D2b] Sur les séries de polynomes; par M. *H. Laurent*..... 309

Pages.

[D4] Sur les fonctions entières et quasi entières; par M. *Edmond Maillet*..... 329

[I23] Essai sur la théorie des fractions continues; par M. *Auric*..... 387

[D4a] Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor; par M. *L. Desaint*..... 433

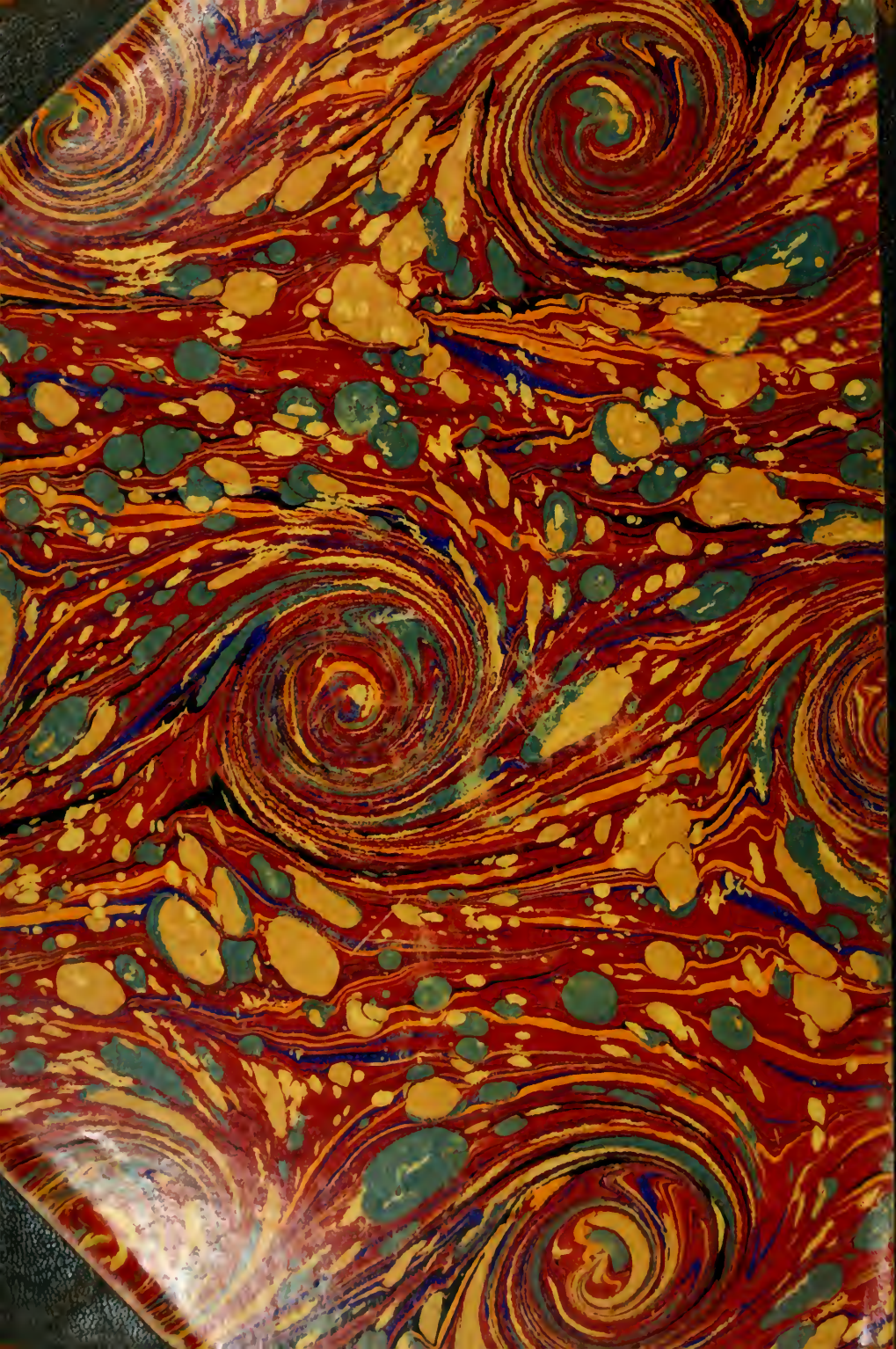
FIN DU TOME VIII DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

11286 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.5
t.8
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY